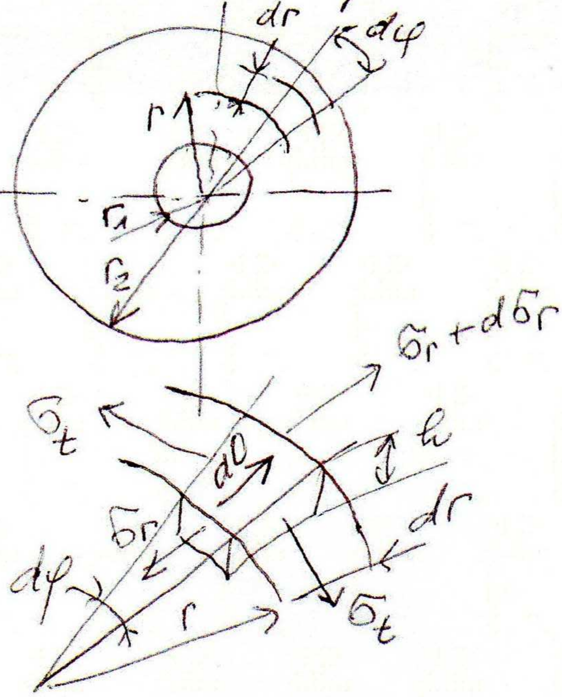
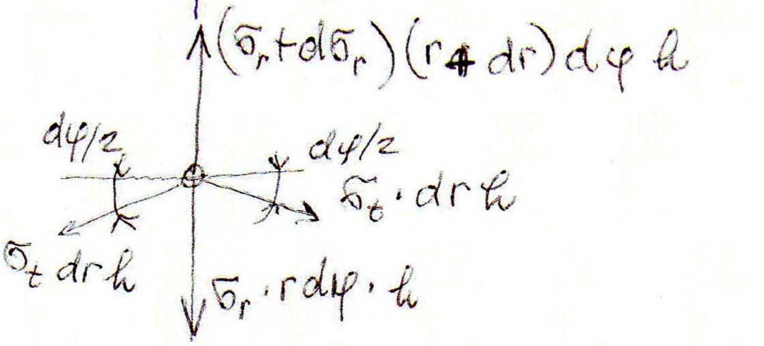
Rotující kotouče a hřídele

na součást působí objemová síla = odstředivá síla, která je rozložena na jednotku objemu



$$dO = \rho dV r\omega^2 = \rho r d\varphi dr h r\omega^2$$



1) Podmínka rovnováhy do radiálního směru:

$$(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)\,d\varphi\cdot h-\sigma_r\, r\, d\varphi\, h-2\sigma_t\, dr\, h\cdot\sin\frac{d\varphi}{2}+$$
$$+\rho\, r\, d\varphi\, dr\, h\cdot r\omega^2=0$$

Po úpravě a zanedbání veličin malých vyššího řádu

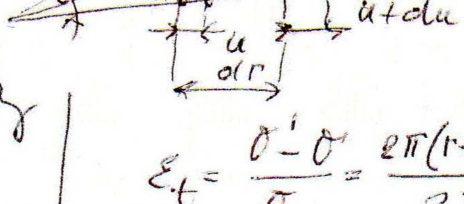
$$\sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}-\sigma_t=-\rho\omega^2r^2$$

ψ splňuje podmínku rovnováhy

zavedeme napěťovou funkci $\sigma_r=\frac{\psi}{r}$ $\quad \sigma_t=\frac{d\psi}{dr}+\rho\omega^2r^2$

2) Vztahy mezi radiálním posuvem a přetvořením

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}\qquad \varepsilon_t=\frac{u}{r}$$



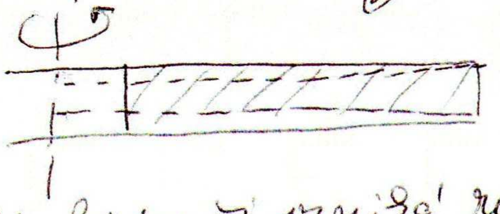
3) podmínka kompatibility

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr}=\frac{\varepsilon_r-\varepsilon_t}{r}$$

$$\varepsilon_t=\frac{O'-O}{O}=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}$$

$$\varepsilon_r=\frac{A'B'-AB}{AB}=\frac{du}{dr}$$

Pokud se jedná o tenký rotující kotouč, pak jeho tloušťka "h" se může při rotaci měnit v závislosti na poloměru – čelní plochy kotouče mohou deplanovat. Pokud se jedná o dlouhý rotující hřídel, pak průřez hřídele deplanovat nemůže.



V kotouči vzniká rovinná napjatost $\sigma_r \neq 0$ $\sigma_t \neq 0$ $\sigma_a = 0$
$\varepsilon_a \neq 0$

V hřídeli vzniká rovinná deformace
$\sigma_r \neq 0$ $\sigma_t \neq 0$ $\sigma_a \neq 0$ $\varepsilon_a = konst$

4) Hookeův zákon

Rovinná napjatost

KOTOUČ

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_r\right)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_t\right)$$

~~[illegible]~~

Rovinná deformace /

HŘÍDEL

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_a)\right)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_a)\right)$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}\left(\sigma_a - \nu(\sigma_t + \sigma_r)\right)$$

$\varepsilon_a = konst$

Do H.z. dosadíme za σ_t a σ_r napěťovou funkci ψ a pak dosadíme ε_t a ε_r do rovnice kompatibility

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{d\psi}{dr} + \rho\omega^2 r^2 - \nu\frac{\psi}{r}\right)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\frac{\psi}{r} - \nu\frac{d\psi}{dr} - \nu\rho\omega^2 r^2\right)$$

Dostaneme rovnici pro ψ

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2}\psi = -(3+\nu)\rho\omega^2 r$$

$$\psi = \psi_{HOM} + \psi_{PART}$$

$$\psi_{HOM} = Ar - B\frac{1}{r} \qquad \psi_{PART} = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^3$$

Vyloučíme σ_a z H.z.
Dosadíme za σ_a do prvních dvou výrazů

$$\sigma_a = E\cdot\varepsilon_a + \nu(\sigma_t + \sigma_r)$$

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_a + \frac{1}{E}\left(\sigma_t(1-\nu^2) - \nu(1+\nu)\sigma_r\right)$$

$$\varepsilon_r = -\nu\varepsilon_a + \frac{1}{E}\left(\sigma_r(1-\nu^2) - \nu(1+\nu)\sigma_t\right)$$

Po dosazení napěťové funkce

$$\sigma_r = \frac{\psi}{r} \qquad \sigma_t = \frac{d\psi}{dr} + \rho\omega^2 r^2$$

do H.z. a po dosazení do rovnice kompatibility

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2}\psi = -\frac{3-2\nu}{1-\nu}\rho\omega^2 r$$

Řešení:

$$\psi = Ar - B\frac{1}{r} - \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 r^3$$

Konstanty A a B určíme z okrajových podmínek.
Po dosazení napěťové funkce do napětí σ_r a σ_t dostáváme:

Kotouč:

$$\sigma_r = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

Hřídel:

$$\sigma_r = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{r^2} - \frac{1+2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 r^2$$

a po dosazení σ_r a σ_t do axiálního napětí:

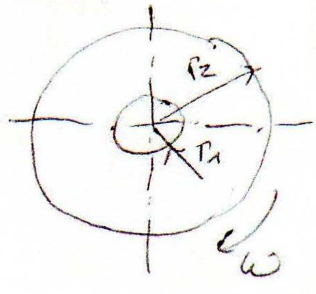
$$\sigma_a = E\cdot\varepsilon_a + \nu\left(2A - \frac{1}{2(1-\nu)}\rho\omega^2 r^2\right)$$

Pokud je $\varepsilon_a = 0$, pak σ_a vypočteme z tohoto vztahu přímo.
Pokud ε_a = konst, vypočteme ε_a z podmínky $\int_{(S)} \sigma_a \, dS = 0$

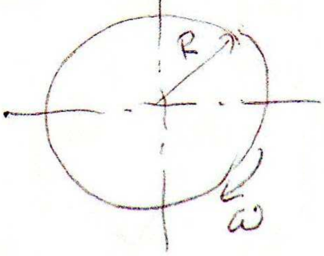
Okrajové podmínky

1) Kotouč s otvorem rotuje volně

$$\sigma_r(r_1) = 0$$
$$\sigma_r(r_2) = 0$$



2) kotouč bez otvoru



$$B = 0$$
$$\sigma_r(R) = 0$$
$$A = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 R^2$$

Změna poloměru R:

$$\sigma_t(R) = A \cancel{+} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 R^2 = \frac{1-\nu}{4}\rho\omega^2 R^2$$

$$\Delta R = \frac{\sigma_t(R)}{E}\cdot R = \frac{1-\nu}{4E}\rho\omega^2 R^3$$

1) plný hřídel $\varepsilon_a = 0$

změna poloměru

$$B = 0$$
$$\sigma_r(R) = 0 \Rightarrow$$
$$A = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 R^2$$

po dosazení:

$$\sigma_t(R) = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 R^2\left(1 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}\right) = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\rho\omega^2 R^2$$

$$\sigma_a(R) = \nu\left(2A - \frac{1}{2(1-\nu)}\rho\omega^2 R^2\right)$$

$$\Delta R = \frac{R}{E}\left(\sigma_t(R) - \nu\,\sigma_a(R)\right)$$

~~2) Plný hřídel ε_a = konst~~

$$\Delta R = \frac{R}{E}\cdot\frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2\left(1 - \nu - 2\nu^2\right)$$