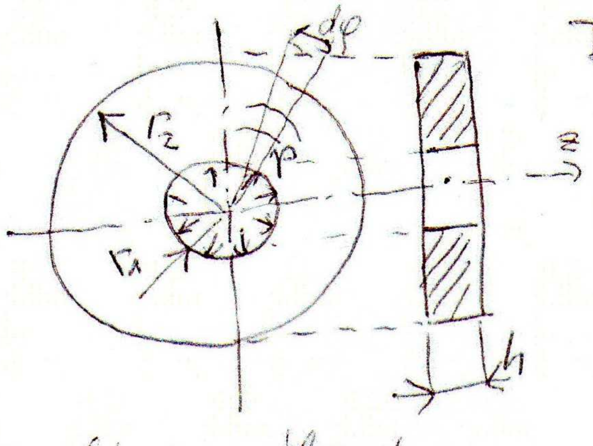
1

Základní úloha pružnosti – určení napětí a deformace součásti zatížené silami.

1) podmínky rovnováhy
2) vztahy mezi posuvy a přetvořeními
3) vyloučení posuvů – rovnice kompatibility
4) Hookeův zákon – vztahy mezi napětími a přetvořeními
5) okrajové podmínky

Aplikace na určení napětí a deformace v tenkém disku zatíženém radiálním tlakem na vnitřním okraji

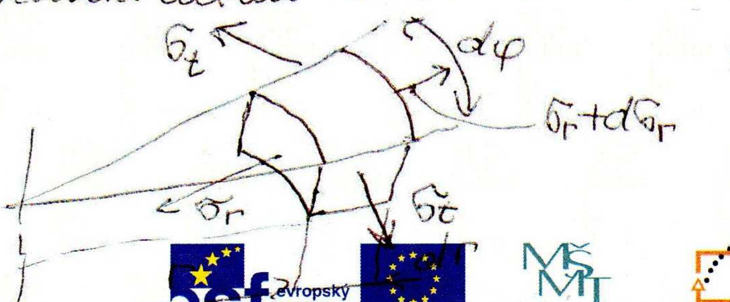


Dáno: r_1, r_2, h, p, E, ν

Úloha je rotačně symetrická v rovinách symetrie (každá rovina procházející ~~středem~~ osou disku) nevznikají smykové napětí.

Zvolíme válcové souřadnice r, φ, z

1) rovnováha elementu vyňatého z disku dvěma radiálními a dvěma válcovými myšlenými řezy



radiální napětí $\sigma_r(r)$ a obvodové napětí $\sigma_t(r)$ jsou funkcemi poloměru podmínka rovnováhy do radiálního směru

$$\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_t = 0$$

(podmínka rovnováhy do směru tečny je splněna identicky)

V podmínce rovnováhy jsou dvě neznámé funkce σ_r a σ_t → úloha není staticky určitá

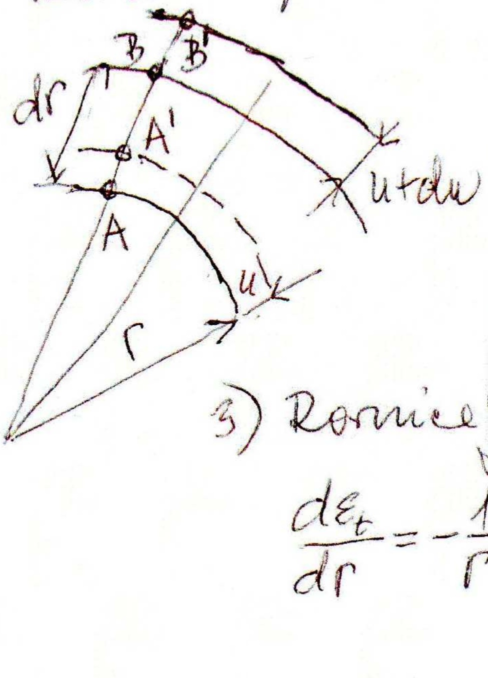
2) vztahy mezi posuvem a přetvořeními

– disk se deformuje tak, že každá kružnice o poloměru r se roztáhne na kružnici o poloměru $r+u(r)$, kde $u(r)$ je radiální posuv, který je funkcí poloměru r

ε_t = obvodové přetvoření (poměrná deformace) je poměr mezi přírůstkem délky deformované kružnice a její původní délkou

$$\varepsilon_t = \frac{O'-O}{O} = \frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

Radiální přetvoření $\varepsilon_r = \dfrac{A'B'-AB}{AB} = \dfrac{du}{dr}$



Před def	Po def
kruž r	$r+u$
kruž $r+dr$	$r+dr+u+du$

3) Rovnice kompatibility (vyloučíme

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = -\frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \Rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{\varepsilon_r-\varepsilon_t}{r}}$$

Nyní máme 5 neznámých $\sigma_r, \sigma_t, \varepsilon_t, \varepsilon_r$ a radiální posuv u

Pokusíme se je ponějnud zredukovat, to se dá udělat několika způsoby.

A) Použijeme Hookeův zákon pro dvouosou napjatost

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\,\sigma_t\right)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\,\sigma_r\right)$$

Řešení „v posuvech"

Dosadíme na levou stranu H.z. za $\varepsilon_t = \frac{u}{r}$ a za $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ a vyjádříme napětí

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

Napětí dosadíme do rovnice rovnováhy a dostaneme difer. rovnici 2-řádu pro radiální posuv $u(r)$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

Je to homogenní rovnice a její řešení je

$$u = C_1 r + C_2\frac{1}{r}$$

Řešení „v napětích"

Zavedeme napěťovou funkci $\psi(r)$, která splní rovnici rovnováhy a ze které lze napětí ~~od~~ σ_t a σ_r odvodit jako $\sigma_r = \frac{\psi}{r}$ a $\sigma_t = \frac{d\psi}{dr}$

dosadíme do H.z.

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{d\psi}{dr} - \nu\frac{\psi}{r}\right)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\frac{\psi}{r} - \nu\frac{d\psi}{dr}\right)$$

a do rovnice kompatib.

$$\frac{1}{E}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} - \nu\left(-\frac{1}{r^2}\psi + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\right) = \frac{1}{Er}\left(\frac{\psi}{r} - \nu\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\psi}{dr} + \nu\frac{\psi}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2}\psi = 0$$

Řešení: $\psi = Ar - B\frac{1}{r}$

esf evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

v posuvech

Dosadíme posuv $u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$ do vztahů pro napětí

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(C_1 - C_2\frac{1}{r^2} + \nu\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right)\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(C_1 + C_2\frac{1}{r^2} + \nu\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right)\right)$$

zavedeme-li nové konst.

$$\sigma_r = A - B\frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{r^2}$$

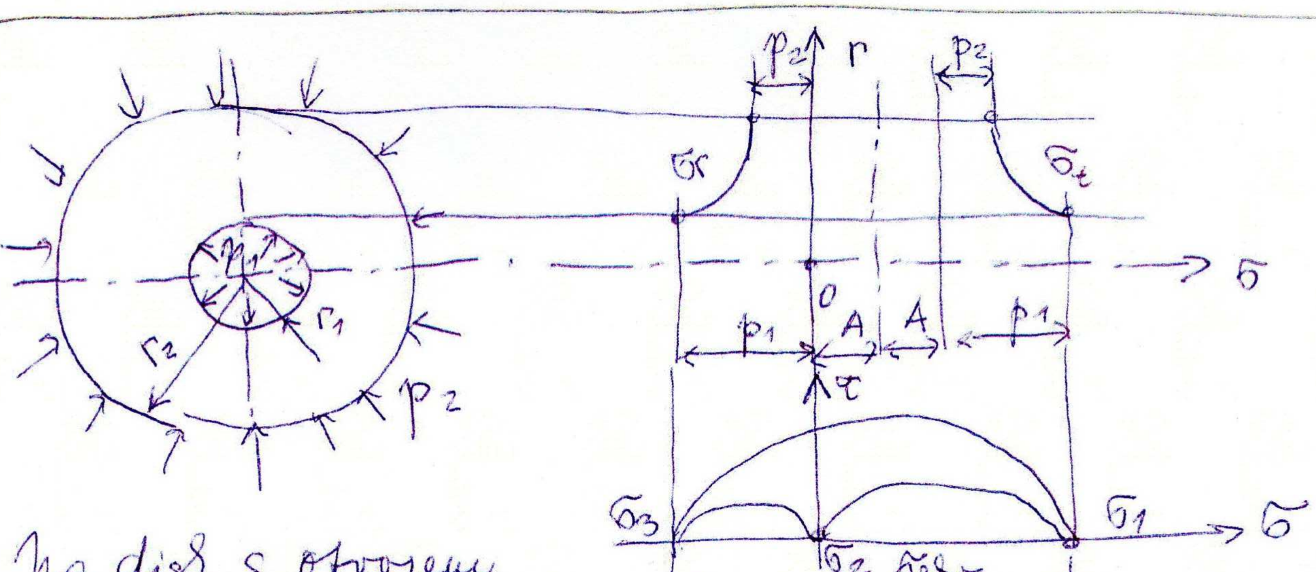
v napětích

Dosadíme funkci Ψ do vztahů pro napětí

$$\sigma_r = \frac{\Psi}{r} = A - B\frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{d\Psi}{dr} = A + B\frac{1}{r^2}$$

Konstanty A a B je třeba určit z okrajových podmínek



Na disk s otvorem působí radiální tlak p_1 na vnitřním okraji a tlak p_2 na vnějším okraji. Určete napětí a změnu poloměrů r_1 a r_2

Dáno: $r_1 = 150$ mm $\quad p_1 = 50$ MPa $\quad E = 2 \cdot 10^5$ MPa

$r_2 = 250$ mm $\quad p_2 = 10$ MPa $\quad \nu = 0{,}3$

Okrajové podmínky ~~pro~~ radiální napětí na okrajích

$\sigma_r(r_1) = -p_1 \qquad \sigma_r(r_2) = -p_2$

$$A - B\frac{1}{r_1^2} = -p_1 \quad \Big| \cdot r_1^2$$

$$A - B\frac{1}{r_2^2} = -p_2 \quad \Big| \cdot r_2^2 \qquad A = \frac{-p_2 + p_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \doteq 13\,\mathrm{MPa}$$

$$A\left(r_2^2 - r_1^2\right) = -p_2 r_2^2 + p_1 r_1^2$$

Tečné napětí na vnitřním poloměru

$$\sigma_t(r_1) = 2A + p_1 = 26 + 50 = 76\,\mathrm{MPa}$$

Obvodové napětí na vnějším poloměru

$$\sigma_t(r_2) = 2A + p_2 = 26 + 10 = 36\,\mathrm{MPa}$$

Na vnitřním poloměru je největší ekvivalentní napětí – podle Guesta je $\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3$

$\sigma_{ekv} = 2(A + p_1) = 126\,\mathrm{MPa}$ viz Mohrova kruž.

Změnu poloměrů $u(r_1)$ a $u(r_2)$ vypočteme z obvodového přetvoření na r_1 a r_2

$$u(r_1) = \varepsilon_t(r_1) \cdot r_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_t(r_1) - \nu\,\sigma_r(r_1)\right) \cdot r_1 =$$

$$= \frac{r_1}{E}\left(2A + p_1 - \nu(-p_1)\right) = \frac{150}{2 \cdot 10^5} \cdot \left(26 + (1 + 0{,}3) \cdot 50\right)$$

$\doteq 0{,}07\,\mathrm{mm}$ změna r_1 je velmi malá

Podobně vypočteme i změnu r_2