Rotačně symetrické úlohy

Pružnost a pevnost 2

10. 5. 2014

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

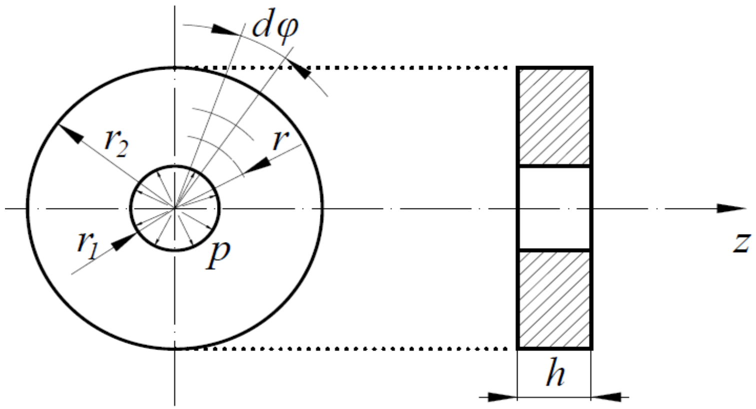
Napětí a deformace zatíženého pružného tělesa

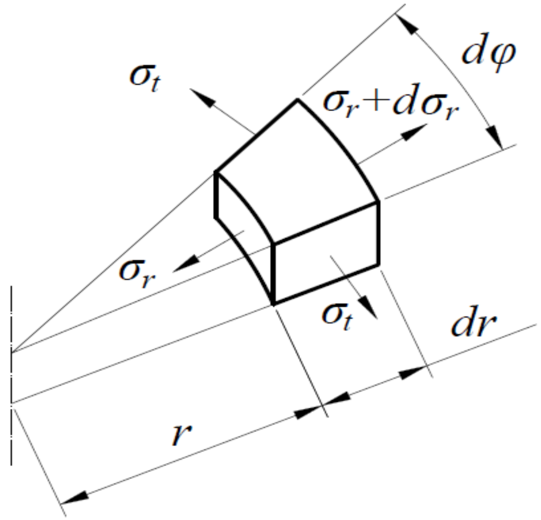
Základní úloha pružnosti - Postup řešení úlohy

- 1) podmínky rovnováhy
- 2) vztahy mezi posuvy a přetvořeními
- 3) vyloučení posuvů – rovnice kompatibility
- 4) Hookeův zákon – vztahy mezi napětími a přetvořeními
- 5) okrajové podmínky

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tenký disk zatížený radiálním tlakem na okraji





Tenký disk s otvorem, tloušťka $h \ll r_1$, Youngův modul E, Poissonovo číslo ν

Úloha je rotačně symetrická, každá rovina procházející osou disku je rovinou symetrie. V rovinách symetrie nevznikají smyková napětí, osové napětí $\sigma_a = 0$, zbývají napětí radiální $\sigma_r(r)$ a obvodové $\sigma_t(r)$ - hlavní napětí.

1) rovnováha elementu vymezeného dvěma radiálními a dvěma válcovými myšlenými řezy

a) podmínka rovnováhy do směru tečny je splněna identicky

b) podmínka rovnováhy do radiálního směru

$$\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_t = 0$$

V podmínce rovnováhy jsou dvě neznámé funkce $\sigma_r(r)$ a obvodové $\sigma_t(r)$ úloha není staticky určitá.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

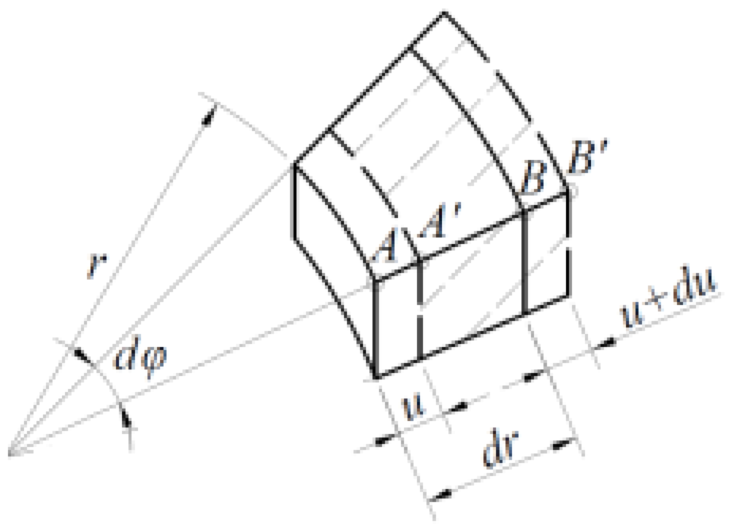
2) vztahy mezi posuvem a přetvořeními

- disk se deformuje tak, že každá kružnice o poloměru *r* se roztáhne na kružnici o poloměru *r+u(r),* kde *u(r)* kde je radiální posuv, který je funkcí poloměru
- obvodové přetvoření ε_t je poměr mezi přírůstkem délky kružnice po deformaci a její původní délkou

$$\varepsilon_t = \frac{O'-O}{O} = \frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

- Radiální přetvoření ε_r je poměr přírůstku délky radiální hrany elementu ku jeho délce před deformací

$$\varepsilon_r = \frac{A'B'-AB}{AB} = \frac{du}{dr}$$



3) Rovnice kompatibility (vyloučíme *u(r) z přetvoření*)

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = -\frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \Rightarrow \frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_t}{r}$$

4) Hookeův zákon pro dvouosou napjatost

Vztahy mezi napětími a přetvořeními

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \upsilon\sigma_r), \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r),$$

$$\Rightarrow$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \upsilon\sigma_t), \qquad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t),$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení v posuvech: nyní máme 5 neznámých: $\sigma_r, \sigma_t, \varepsilon_t, \varepsilon_r$ a *u(r)* – postupnými úpravami vyloučíme všechny až na radiální posuv *u(r)*

- Dosadíme do Hookeova zákona za $\varepsilon_r \; a \; \varepsilon_t$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{du}{dr} + \upsilon \frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{u}{r} + \upsilon \frac{du}{dr}\right)$$

- a napětí dosadíme do rovnice rovnováhy. Dostaneme diferenciální rovnici 2- řádu pro radiální posuv *u(r)*

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

- Je to homogenní rovnice Eulerova typu, jejím řešením je funkce

$$u(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}$$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Radiální a obvodové napětí

- Dosadíme radiální posuv $u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$
  do vztahů pro napětí:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[C_1 - C_2 \frac{1}{r^2} + \upsilon\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right)\right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[C_1 + C_2 \frac{1}{r^2} + \upsilon\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right)\right]$$

Po úpravách a po zavedení nových konstant *A* a *B* dostáváme přehledné vztahy

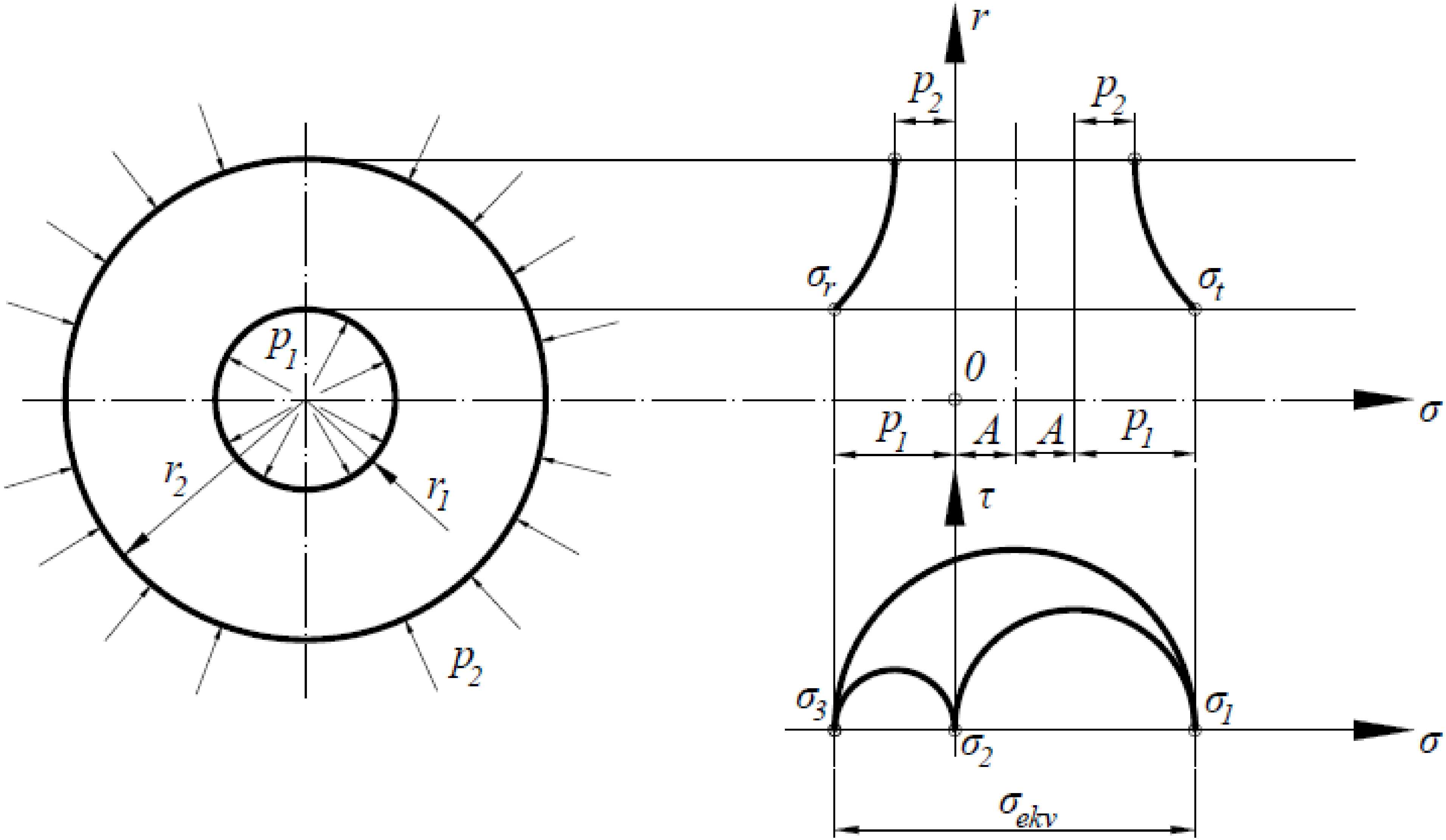
$$\sigma_r = A - B\frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{r^2}$$

Konstanty *A* a *B* je třeba určit z okrajových podmínek .

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad: Na disk s otvorem působí radiální tlaky p_1 a p_2 na vnitřním a vnějším okraji. Je třeba určit napětí a změnu rozměrů disku



evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Okrajové podmínky:

Dáno: $r_1 = 150\ mm$ $p_1 = 50\ MPa$ $E = 2 \cdot 10^5\ MPa$

$r_2 = 250\ mm$ $p_2 = 10\ MPa$ $\upsilon = 0{,}3$

Okrajové podmínky pro radiální napětí na okrajích $\sigma_r(r_1) = -p_1$ $\sigma_r(r_2) = -p_2$

$$A - B\frac{1}{r_1^2} = -p_1 \quad \Big| \cdot r_1^2$$

$$A - B\frac{1}{r_2^2} = -p_2 \quad \Big| \cdot r_2^2$$

$$A\left(r_2^2 - r_1^2\right) = -p_2 r_2^2 + p_1 r_1^2$$

$$A = \frac{-p_2 + p_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \cong 13\ MPa$$

Obvodové napětí na vnitřním poloměru

$$\sigma_t(r_1) = 2A + p_1 = 26 + 50 = 76\ MPa$$

Obvodové napětí na vnějším poloměru

$$\sigma_t(r_2) = 2A + p_2 = 26 + 10 = 36\ MPa$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Na vnitřním poloměru je největší ekvivalentní napětí – podle Guesta je $\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3$

$\sigma_{ekv} = 2(A + p_1) = 126\,MPa$ viz Mohrova kružnice

Změnu poloměru $u(r_1)$ a $u(r_2)$ vypočteme z obvodového přetvoření na r_1 a r_2

$$u(r_1) = \varepsilon_t(r_1)\cdot r_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_t(r_1) - \upsilon\sigma_r(r_1)\right]\cdot r_1 = \frac{r_1}{E}\left[2A + p_1 - \upsilon(-p_1)\right] =$$

$$= \frac{150}{2\cdot 10^5}\left[26 + (1 + 0{,}3)50\right] \cong 0{,}07\ mm$$

změna r_1 je velmi malá. Podobně vypočteme i změnu r_2.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TKMOST

Řešení v napětích

Zavedeme napěťovou funkci $\psi(r)$, která splní rovnici rovnováhy a ze které lze napětí

σ_t a σ_r odvodit jako $\sigma_r = \dfrac{\psi}{r}$ a $\sigma_t = \dfrac{d\psi}{dr}$ dosadíme do H.z.

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{d\psi}{dr} - \upsilon\frac{\psi}{r}\right) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\frac{\psi}{r} - \upsilon\frac{d\psi}{dr}\right)$$

A do rovnice kompatibility

$$\frac{1}{E}\left[\frac{d^2\psi}{dr^2} - \upsilon\left(-\frac{1}{r^2}\psi + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{Er}\left(\frac{\psi}{r} - \upsilon\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\psi}{dr} + \upsilon\frac{\psi}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2}\psi = 0$$

Řešení: $\psi = Ar - B\dfrac{1}{r}$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení v napětích

Dosadíme funkci ψ do vztahů pro napětí

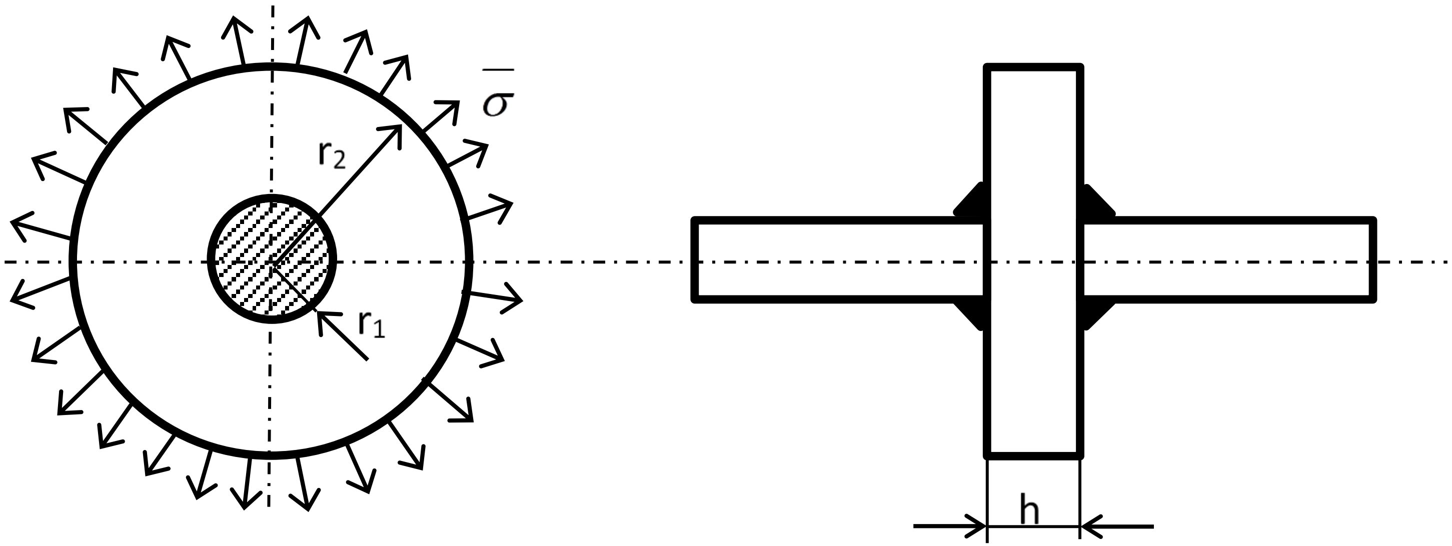
$$\sigma_r = \frac{\psi}{r} = A - B\frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{\partial \psi}{\partial r} = A + B\frac{1}{r^2}$$

Konstanty A a B je třeba určit z okrajových podmínek

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad: Kombinace okrajových podmínek pro napětí a pro posuv



Tuhý kotouč je přivařen k tuhému hřídeli a je zatížen tahovou silou $\overline{\sigma}$ na vnějším okraji (síla je rozložena na jednotku plochy).

Radiální napětí na vnějším okraji je rovno působícímu $\overline{\sigma}$ tahu

$$\sigma_r(r_2) = \overline{\sigma} \tag{1}$$

Vnitřní poloměr kotouče se nemůže měnit

$$u(r_1) = 0 \tag{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\Rightarrow u(r_1) = \frac{r_1}{E}\left[\sigma_t(r_1) - \nu\sigma_r(r_1)\right] = 0$$

$$\frac{r_1}{E}\left[A + B\frac{1}{r_1^2} - \nu\left(A - B\frac{1}{r_1^2}\right)\right] = 0 \qquad \Rightarrow B = -A\frac{1-\nu}{1+\nu}r_1^2 \tag{3}$$

Dosadíme B do (1)

$$A + A\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} = \bar{\sigma} \qquad \Rightarrow A = \frac{\bar{\sigma}}{1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1-\nu}{1+\nu}} \tag{4}$$

Konstantu B dostaneme po dosazení za A do vztahu (3)

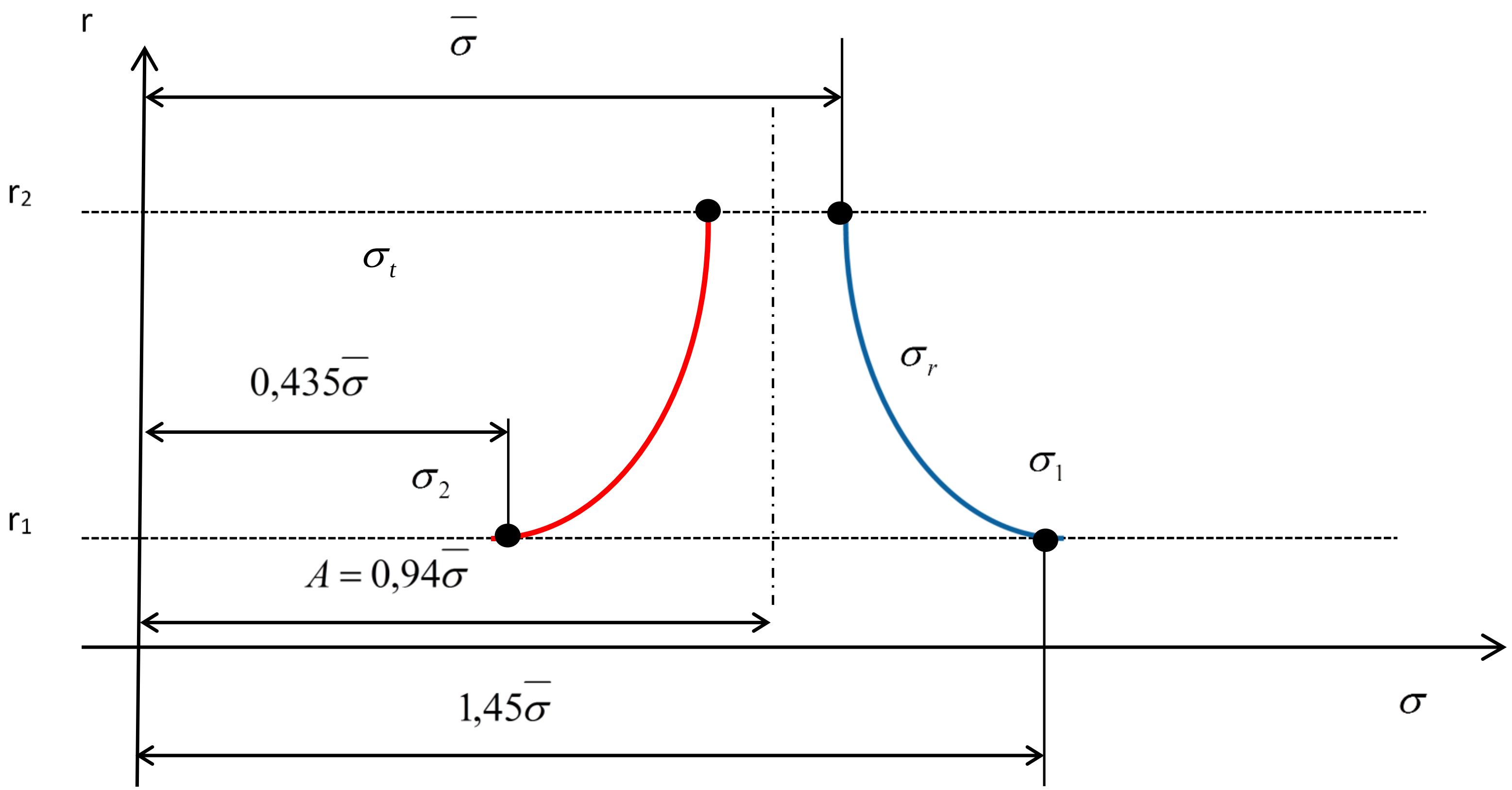
$$B = -\frac{1-\nu}{1+\nu}r_1^2 \frac{\bar{\sigma}}{1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1-\nu}{1+\nu}}$$

Nyní můžeme vypočítat radiální a obvodové napětí všude v kotouči.

Nebezpečná napjatost je na vnitřním poloměru, kde

$$\sigma_t(r_1) = \nu\sigma_r(r_1) \text{ a } \sigma_r(r_1) = A - B\frac{1}{r_1^2}$$

Pro $r_1 = 20\ \mathrm{mm}$, $r_2 = 60\ \mathrm{mm}$ a $\nu = 0{,}3$ je $\sigma_r(r_1) = 1{,}45\ \overline{\sigma}$, $\sigma_t(r_1) = 0{,}435\ \overline{\sigma}$, $A = 0{,}94\ \overline{\sigma}$



Maximální ekvivalentní napětí podle Guesta

$$\sigma_E = \sigma_1 - \sigma_3 = 1{,}45\overline{\sigma} - 0 = 1{,}45\overline{\sigma}$$