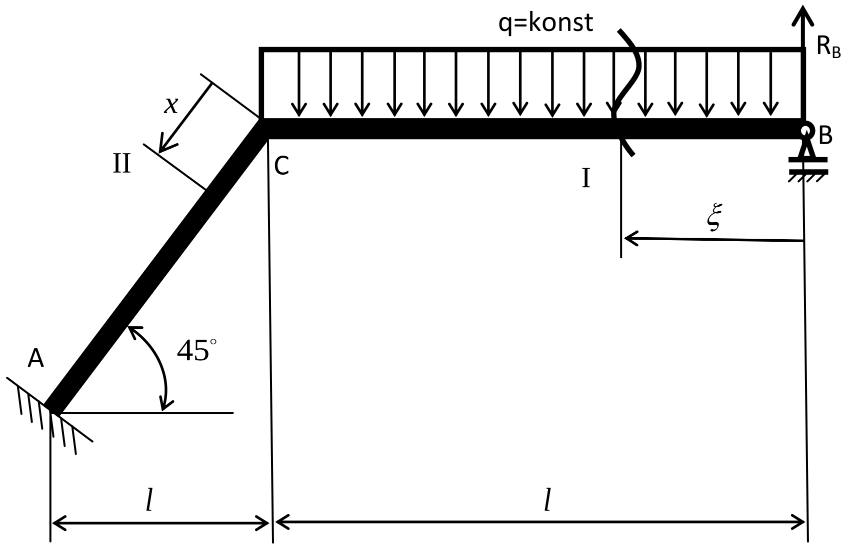
Aplikace Castiglianových vět – staticky neurčitá úloha



Máme určit maximální vnitřní ohybový moment v tyči. Tyč je staticky neurčitá. Za staticky neurčitou volíme reakci R_B.

Musí platit věta o minimu deformační energie

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial R_B} = \sum_{i=1}^{2} \int \frac{M_i \frac{\partial M_i}{\partial R_B}}{EJ} d\xi$$

i	Meze	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial R_B}$
1	$0 \le \xi \le l$	$R_B \xi - \frac{q\xi^2}{2}$	ξ
2	$0 \le x \le \sqrt{2}l$	$R_B\left(l + x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - ql\left(\frac{l}{2} + x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(l + x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(R_B\xi - \frac{q\xi^2}{2}\right)\xi d\xi + \int_0^{\sqrt{2}l}\left[R_B\left(l + x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - ql\left(\frac{l}{2} + x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left(l + x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 0,65ql$$

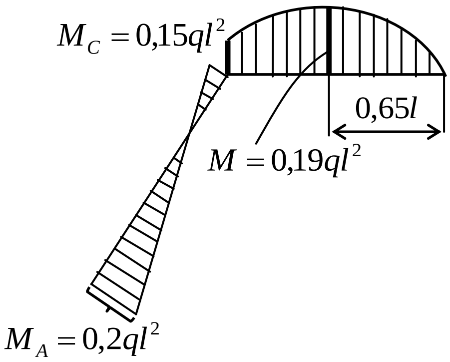
Moment ve vetknutí

$$M_A = R_B\,2l - ql\frac{3}{2}l = -0,2ql^2$$

Moment v místě zalomení

$$M_C = R_B l - q\frac{l^2}{2} = 0,15ql^2$$

Lokální extrém v místě nulové tečné síly

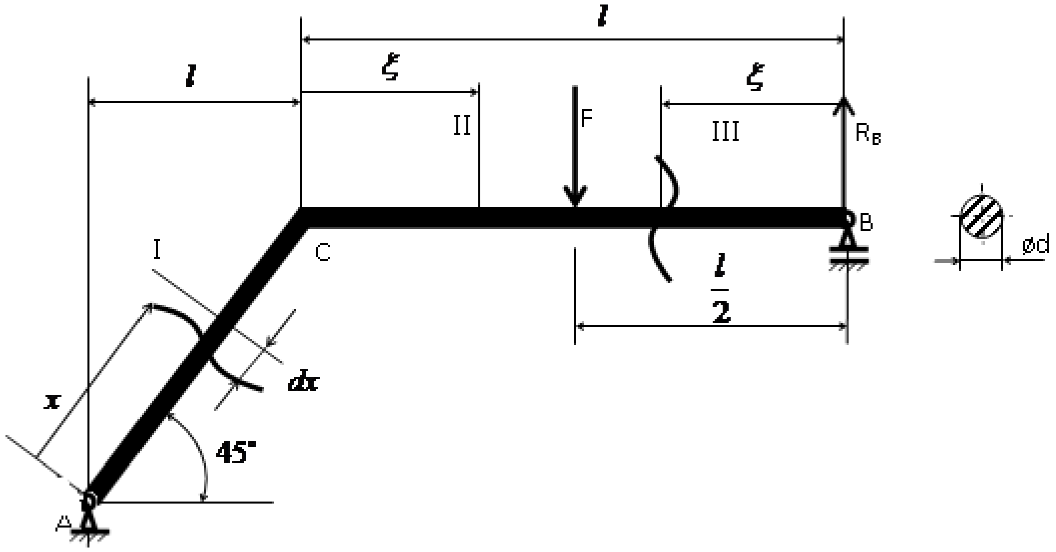


$$T(\bar{x}) = R_B - q\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0,65l,$$

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{2}q\bar{x}^2 = 0,19ql^2.$$

$$M_{\max} = M_A \cong 0,2ql^2$$

Aplikace Castiglianových vět – staticky určitá úloha



Tyč je z lineárně elastického materiálu. V bodech A a B jsou kloubová uložení.
Dáno: l, Ød, F, E

Určíme průhyb tyče pod silou F jako

$$w = \frac{\partial U}{\partial F}.$$

Tyč je uložena staticky určitě. Reakce v bodech A a B určíme z podmínky rovnováhy - reakce jsou svislé síly:

$R_A = \frac{1}{4}F$ a $R_B = \frac{3}{4}F$.

Deformační energie v jednotlivých částech tyče závisí na vnitřním ohybovém momentu.

Vnitřní ohybový moment	Derivace momentu	Meze integrálu
$M_I(x) = R_A x \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\partial M_I}{\partial F} = \frac{1}{4} x \frac{\sqrt{2}}{2}$	$0 \le x \le \frac{l}{\cos 45°}$
$M_{II}(\xi) = R_A(l+\xi)$	$\frac{\partial M_{II}}{\partial F} = \frac{1}{4}(l+\xi)$	$0 \le \xi \le \frac{l}{2}$
$M_{III}(\xi) = R_B \xi$	$\frac{\partial M_{III}}{\partial F} = \frac{3}{4}\xi$	$0 \le \xi \le \frac{l}{2}$

$$w = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EJ}\int_0^{\sqrt{2}l} R_A x^2 \frac{1}{8} dx + \frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{l}{2}} R_A \frac{1}{4}(l+\xi)^2 d\xi + \frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{l}{2}} R_B \frac{3}{4}\xi^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[R_A \frac{1}{24}\left(\sqrt{2}l\right)^3 + R_A \frac{1}{4}\left(\frac{l^3}{2} + \frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{24}\right) + R_B \frac{3}{4}\frac{l^3}{24}\right] \cong \frac{0{,}094 F l^3}{EJ}$$

Pozn: V první části tyče musí být myšlený řez veden ve směru tyče ve vzdálenosti x od bodu A – osa x musí být totožná s osou tyče (dx je element délky tyče).