

Kmitání mechanických soustav 1 stupeň volnosti – vynucené kmitání

Iva Petříková

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Obsah

- Soustava s jedním stupněm volnosti – vynucené kmitání
- Vynucené kmitání netlumené
- Vynucené kmitání tlumené
- Amplitudová a fázová charakteristika
- Přenos sil do základu
- Rotační nevyváženost
- Kinematické buzení, relativní pohyb

Vynucené kmitání, harmonická budící síla

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad \text{harmonická budící síla}$$

1. Vynucené netlumené kmitání

- homogenní řešení rovnice $m\ddot{x} + kx = 0$

- partikulární řešení rovnice $m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$

Řešení dif. rovnice s pravou stranou $\rightarrow$ ustálené vynucené kmity (ustálená odezva)

Předpokládané řešení ve tvaru harmonické funkce:

$$x_p = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p = -\omega^2 x_p = -\omega^2 (a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t)$$

Po dosazení do dif. rov.: $(k - m\omega^2) a_1 \sin \omega t + (k - m\omega^2) a_2 \cos \omega t = F_0 \sin \omega t$

Porovnání koeficientů u funkce sin a cos na obou stranách rovnice $\rightarrow$ hodnota amplitudy a_1

$$a_1 = \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \quad a_2 = 0$$

Vynucené kmitání, harmonická budící síla

Partikulární řešení: $x_p = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$

$$a = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = a_{ST} \frac{1}{1 - \eta^2}$$

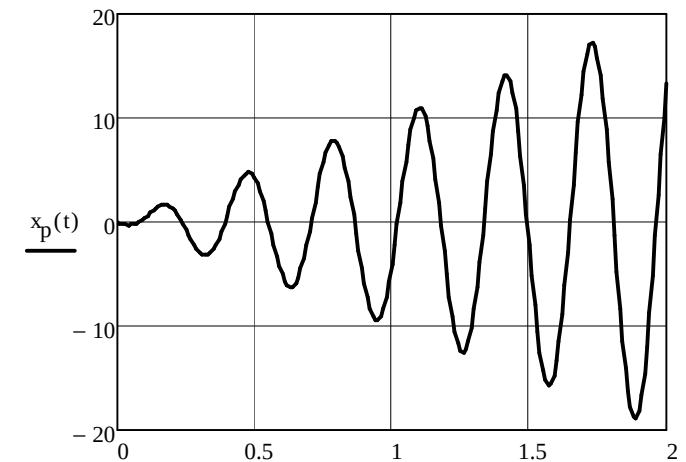
$$a_{ST} = \frac{F_0}{k}$$

$$\beta(\eta) = \frac{a}{a_{ST}} = \frac{1}{1 - \eta^2}$$

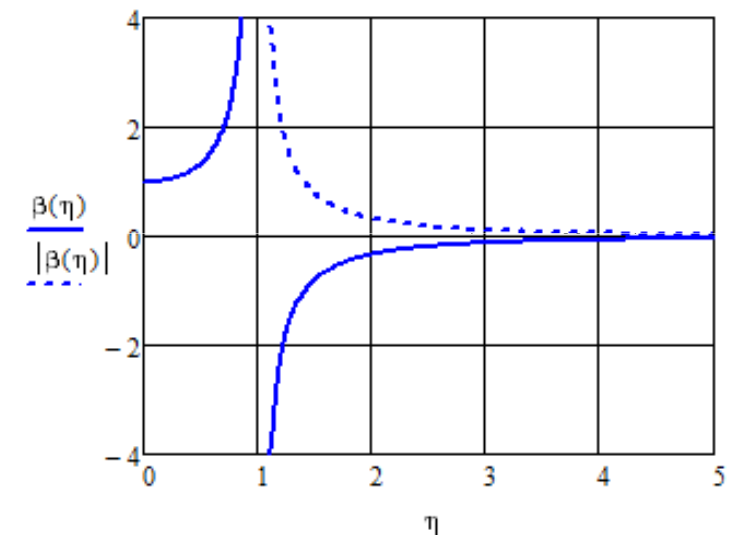
Případ rezonance:

$$\eta = 1 \Rightarrow \omega = \Omega \Rightarrow \frac{a}{a_{ST}} \rightarrow \infty$$

Amplituda se blíží k nekonečnu



Kmitání soustavy s 1 stupněm volnosti v rezonanci



Amplitudová charakteristika netlumené soustavy

Vynucené kmitání, harmonická budící síla

2. Vynucené tlumené kmitání

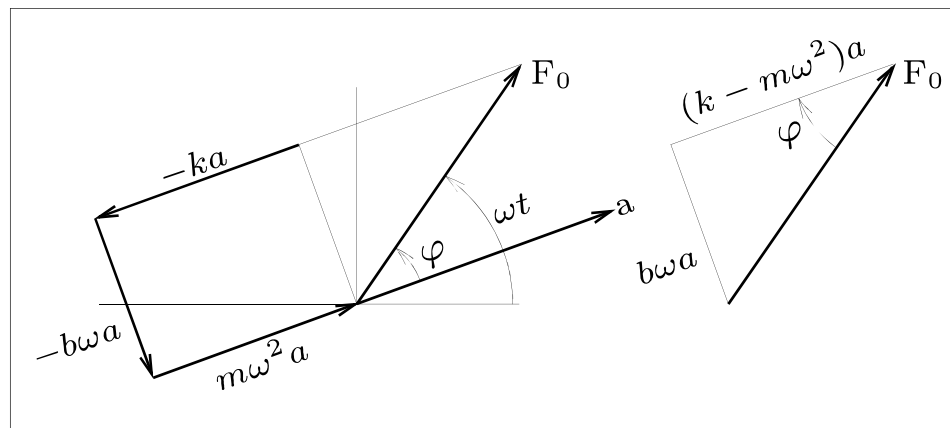
- homogenní řešení rovnice $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
- partikulární řešení rovnice $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$

Předpokládané řešení ve tvaru harmonické funkce:

$$x = a \sin(\omega t - \varphi)$$

$$-ma\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + ba\omega \cos(\omega t - \varphi) + ka \sin(\omega t - \varphi) = F_0 \sin \omega t$$

Názorné řešení pomocí vektorového diagramu:



Vektorový diagram

$$a = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$$

Vynucené kmitání - amplitudová a fázová charakteristika

Řešení dif. rce: $x(t) = x_h + x_p$

$$x(t) = e^{-\zeta\Omega t} [C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t}] + \frac{F_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

Hodnoty C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek

Úprava na poměrné amplitudy:

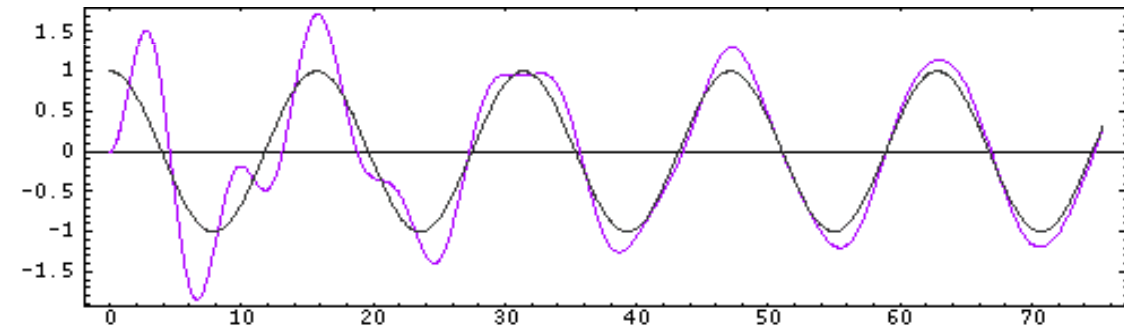
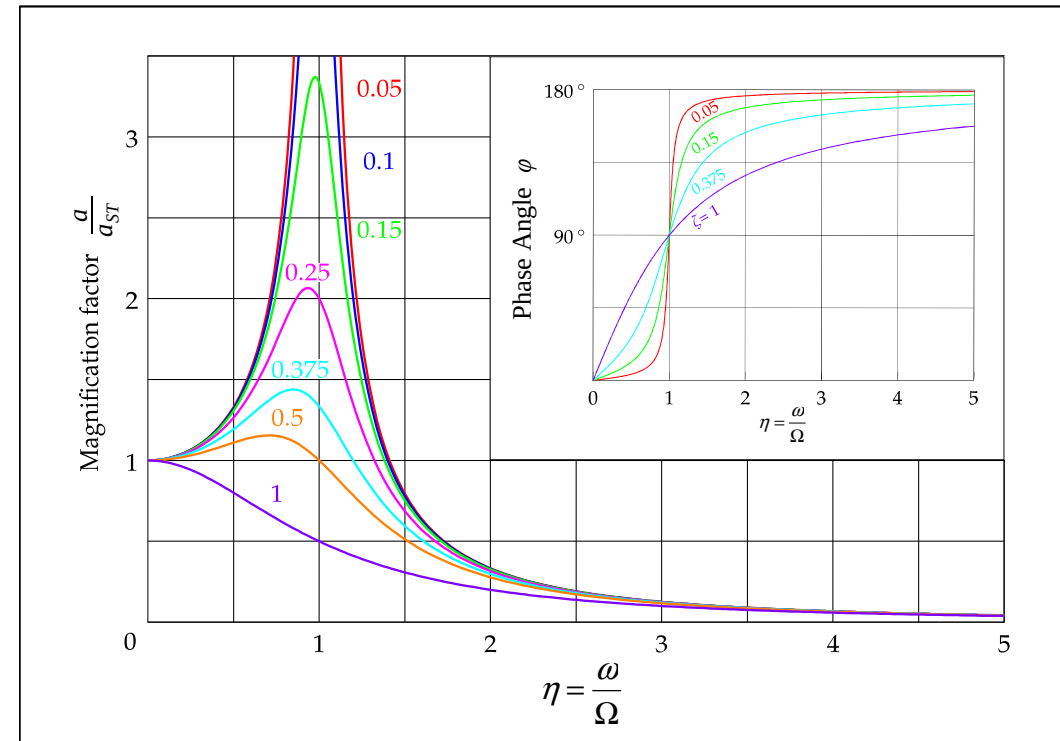
$$a = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\omega\right)^2}}$$

$$\frac{F_0}{k} = a_{ST} \quad \text{statická výchylka}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega} \quad \text{koeficient naladění}$$

$$\frac{a}{a_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$



Přechodový děj v podrezonanční oblasti $\eta < 1$

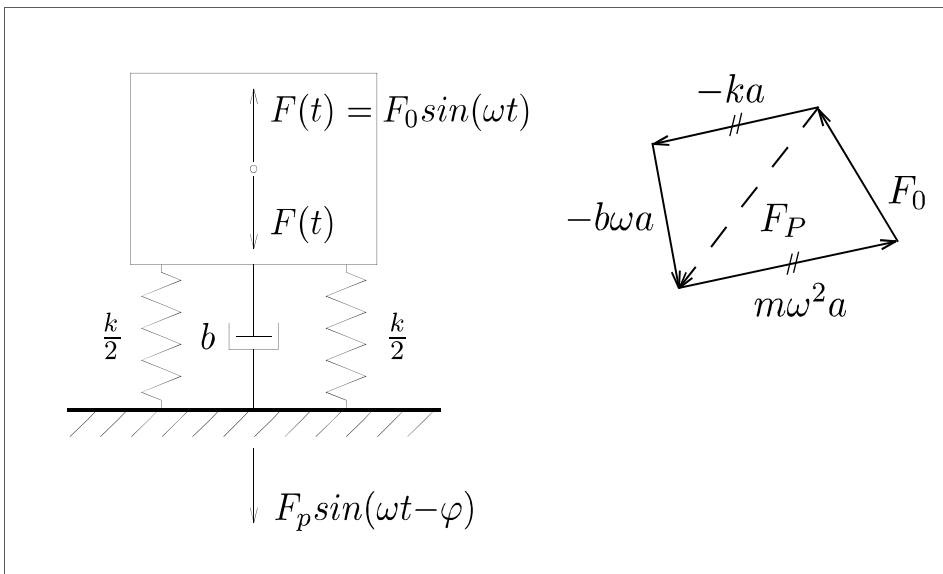
Postup řešení soustav s 1 stupněm volnosti

Volné kmitání tlumené	Volné kmitání netlumené	Vynucené kmitání tlumené
$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$	$m\ddot{x} + kx = 0$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$ $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$ $x = x_h + x_p$
varianty homogenního řešení $x_h = e^{-\zeta\Omega t} [C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t}]$ $x_h = e^{-\zeta\Omega t} (A \cos \Omega_T t + B \sin \Omega_T t)$ $x_h = C e^{-\zeta\Omega t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t + \gamma)$	varianty homogenního řešení $x_h = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$ $x_h = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$ $x_h = C \sin(\Omega t + \gamma)$	předpoklad partikulárního řešení $x_p = a \sin(\omega t - \varphi)$
Konstanty C_1, C_2 resp. A, B resp. C, γ určíme z počátečních podmínek $x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = v_0$		ustálené kmitání $x(t) = e^{-\zeta\Omega t} [C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t}] + \frac{F_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$

Vynucené kmitání - přenos sil do základu

Stroje nebo motory pevně uložené na základové konstrukci budovy přenášejí vibrace přímo do základu.

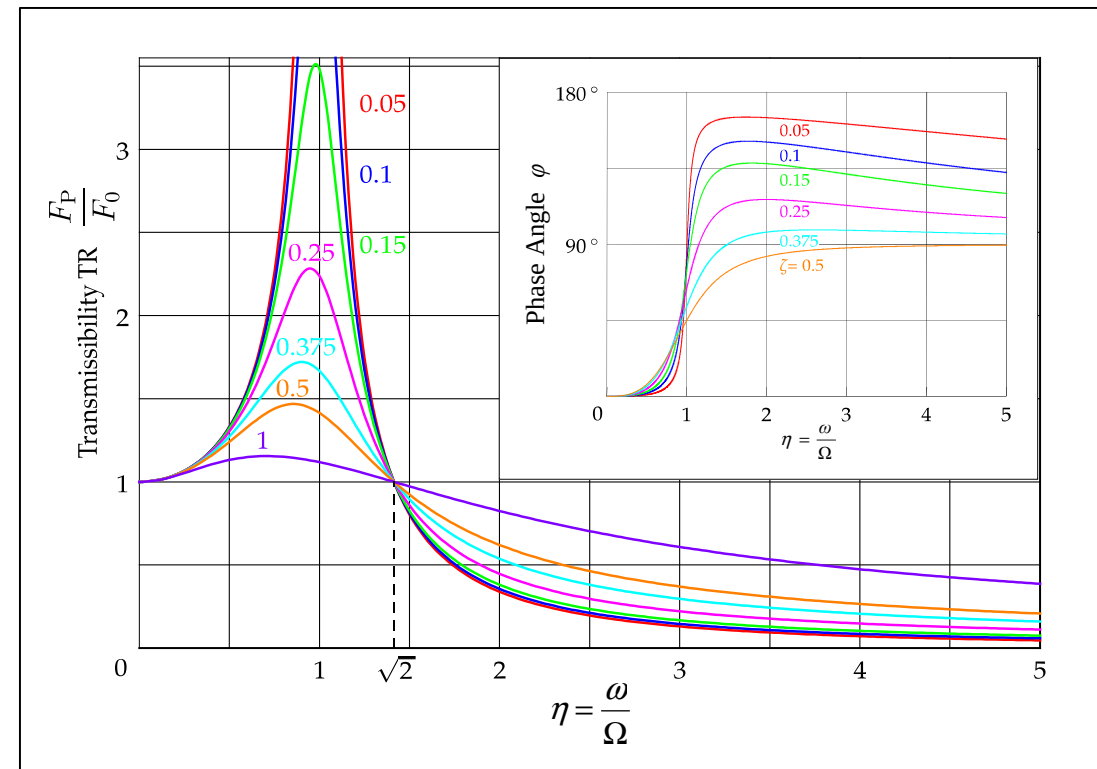
- a) $\omega = \text{konst.} \rightarrow \eta = \text{konst.}$ $\omega \gg \Omega$, $\eta \gg \sqrt{2}$, malý poměrný útlum ζ
- b) $\omega \neq \text{konst.} \rightarrow$ vibroizolace, uložení s tlumením



$$F_P = \sqrt{(-ka)^2 + (b\omega a)^2} = a\sqrt{k^2 + (b\omega)^2}$$

$$= F_0 \sqrt{\frac{k^2 + (b\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\frac{F_P}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}$$

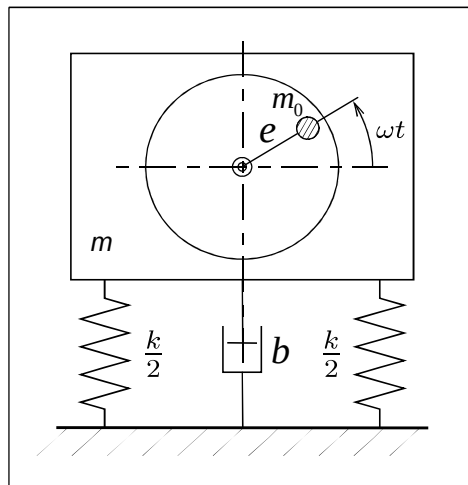


Amplitudová a fázová charakteristika

Vynucené kmitání – rotační nevyváženost

Zdrojem periodicky proměnné působící síly jsou vratné nebo rotační stroje, např. rotace nevyváženého kotouče nebo kola.

m_0 ... nevyvážená hmota, e ... poloměr

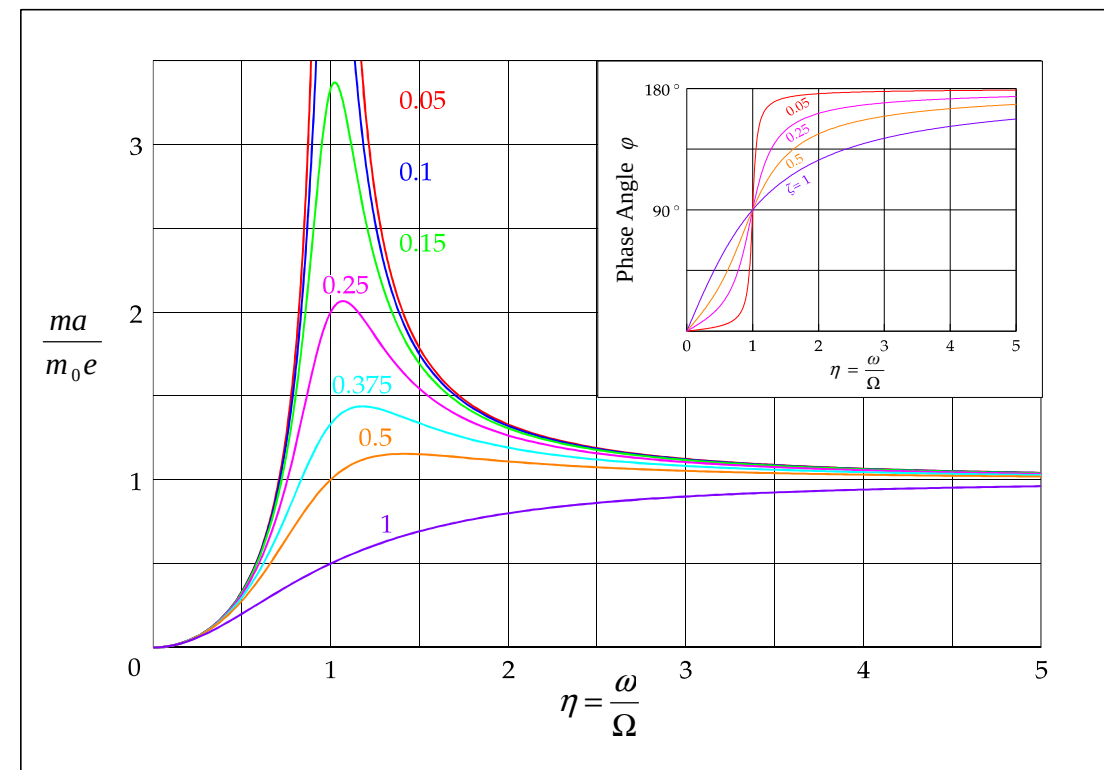


$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = m_0 e \omega^2 \sin \omega t$$

$$a = \frac{m_0 e \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\frac{a}{\frac{m_0}{m} e} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$

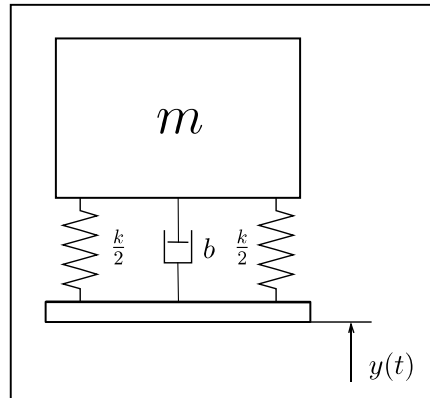


Amplitudová a fázová charakteristika

Kinematické buzení, relativní pohyb

Vynucené kmitání mechanického systému může být způsobeno pohybem základu (automobily, letadla a lodě)

Harmonické kinematické buzení $y = y_0 e^{i\omega t}$



$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad x_r = x - y$$

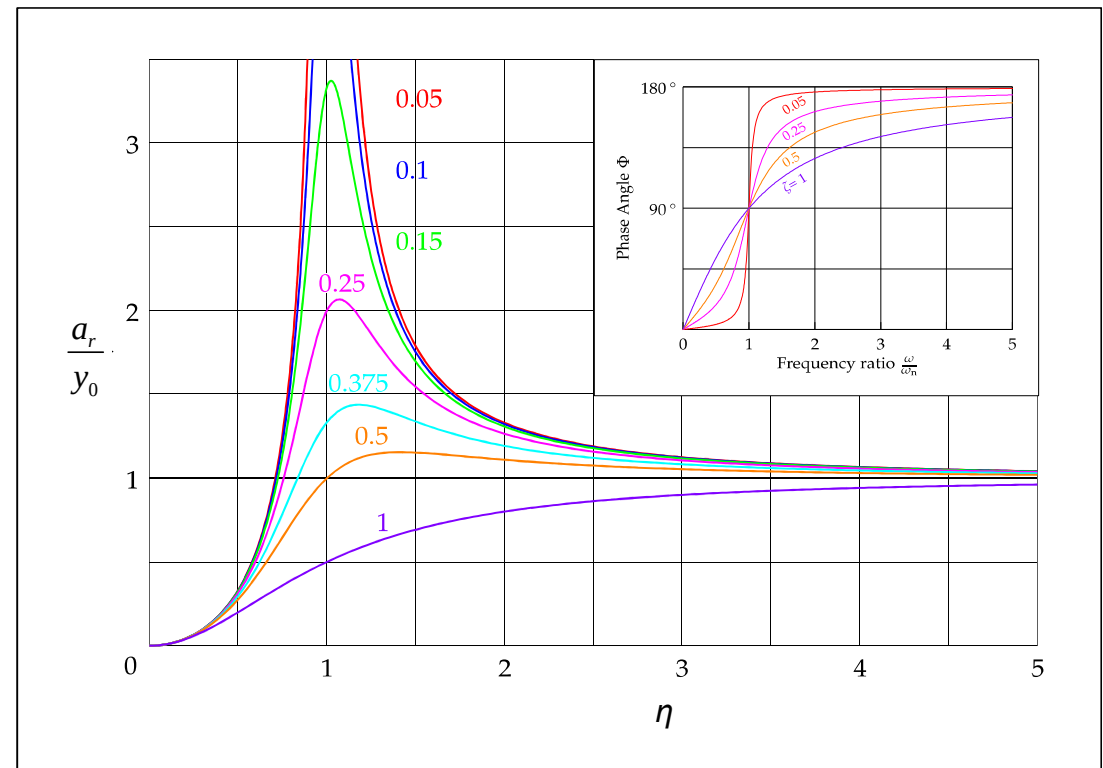
$$m\ddot{x}_r + b\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{y}$$

$$m\ddot{x}_r + b\dot{x}_r + kx_r = m\omega^2 y_0 e^{i\omega t}$$

Partikulární řešení dif. rovnice

$$x_r = a_r e^{i(\omega t - \varphi)} \quad a_r = \frac{m\omega^2 y_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\frac{a_r}{y_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad \tan \varphi = \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$



Amplitudová a fázová charakteristika

Vibrometry a akcelerometry

Relativní výchylka

$$x_r = a_r e^{i(\omega t - \varphi)} = \frac{y_0 \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2}$$

$$x_r = a_r e^{i(\omega t - \varphi)} = y_0 \eta^2 \beta e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (1)$$

Rovnice představuje základní rovnici při konstrukci snímačů pro měření výchylek rychlostí a zrychlení

1) Vibrometry: pro měření výchylek

Relativní výchylka hmoty m vzhledem k pohybu základu je dána rovnicí (1) a hodnota $\eta^2 \beta \approx 1$

$$x_r \approx y_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Amplituda relativní výchylky je přibližně stejná jako amplituda pohybu základu. Tato podmínka je splněna pro $\eta^2 > 3, \omega > 3\Omega$

To je v případě, kdy vlastní frekvence měřícího přístroje je nižší než budící frekvence. Nižší frekvence přístroje lze dosáhnout zvýšením hmotnosti nebo snížením tuhosti. Tlumení může zlepšit rozsah použití vibrometru.

2) Akcelerometry: pro měření zrychlení

Po úpravě rovnice (1):

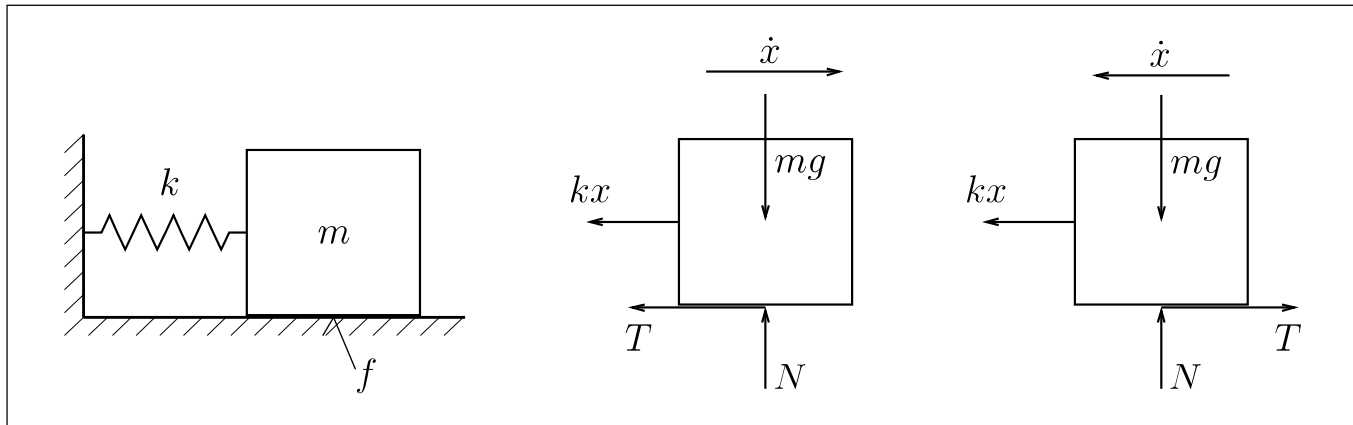
$$\Omega^2 x_r = \omega^2 y_0 \beta e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$\omega^2 y_0$ je amplituda zrychlení vibrujícího systému

Pro $\beta \approx 1$:

$$-\Omega^2 x_r = -\omega^2 y_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Coulombovo tlumení



Obr.1a, b, c

Coulombovo tření způsobí při pohybu soustavy (hmota-pružina) po drsné podložce tzv. Coulombovo tlumení. Třecí síla působí v opačném směru než pohybující se objekt. Kmitání je popsáno 2 diferenciálními rovnicemi, které jsou závislé na směru pohybu, viz obr. b a c. Pružina je stále v tahu.

$$m\ddot{x} = -kx - T \quad \dot{x} > 0$$

$$m\ddot{x} = -kx + T \quad \dot{x} < 0$$

$$m\ddot{x} + kx = \mp T$$

Tlumení způsobené Coulombovým třením

Dif. rovnice s konstantní pravou stranou:

$$x = x_h + x_p$$

$$x_p = C$$

$$x_p = \mp \frac{T}{k}$$

$$x(t) = A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t - \frac{T}{k} \quad \dot{x} \geq 0 \quad (\text{I})$$

$$x(t) = A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t + \frac{T}{k} \quad \dot{x} < 0 \quad (\text{II})$$

Konstanty A_1 , B_1 , A_2 , B_2 určíme z počátečních podmínek.

Počáteční podmínky: počáteční výchylka je x_0 , počáteční rychlost je nulová.

Následuje pohyb **doleva** (rovnice (II)):

$$x_0 = A_2 + \frac{T}{k} \Rightarrow A_2 = x_0 - \frac{T}{k}$$

$$0 = \Omega B_2 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{T}{k} \right) \cos \Omega t + \frac{T}{k} \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega \left(x_0 - \frac{T}{k} \right) \sin \Omega t \quad (2)$$

Směr pohybu se změní, když $\dot{x} = 0$, vypočteme čas t_1 , když dojde ke změně pohybu **doprava**:

$$0 = -\Omega \left(x_0 - \frac{T}{k} \right) \sin \Omega t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\Omega}$$

Výchylka je dána dosazením do (1):

$$x(t_1) = x\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = -x_0 + \frac{2T}{k}$$

Ve druhé polovině cyklu se hmota pohybuje doprava a počáteční podmínky jsou dány rovnicemi (1) a (2) :

$$x\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = -x_0 + \frac{2T}{k}, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = 0$$

Tlumení způsobené Coulombovým třením

Po dosazení těchto počátečních podmínek do (I) jsou konstanty:

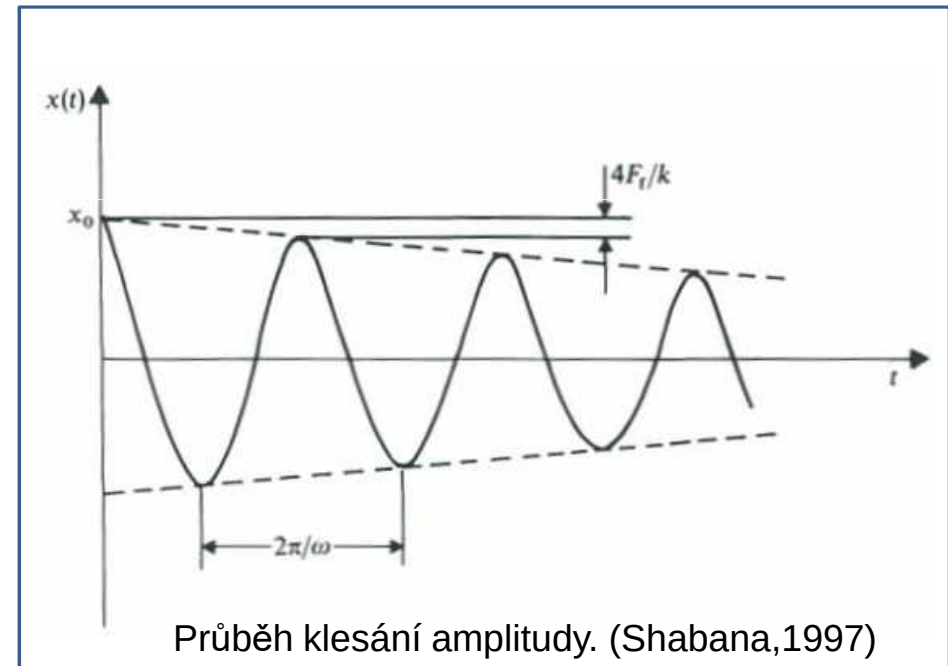
$$B_1 = 0 \quad A_1 = x_0 - 3\frac{T}{k}$$

Výchylka a rychlost v druhé části periody:

$$x(t) = \left(x_0 - 3\frac{T}{k} \right) \cos \Omega t - \frac{T}{k}$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega \left(x_0 - 3\frac{T}{k} \right) \sin \Omega t$$

Amplituda klesá po každé polovině periody o hodnotu $2T/k$, po celé periodě o $4T/k$. K zastavení pohybu dojde při amplitudě a_f , kdy je síla v pružině ka_f menší než třecí síla



Názvosloví z kmitání

- **Amplituda** – maximální výchylka harmonicky se měnící veličiny od její průměrné hodnoty
- **Buzení** – působení vnější časově proměnné síly nebo momentu na kmitající systém nebo vnější časová změna výchylky
- **Diskrétní model** – model s konečným počtem stupňů volnosti (tuhé hmotné bezrozměrné útvary spojené pružnými nehmotnými elementy)
- **Fázová charakteristika** – závislost změny fázového úhlu na frekvenci
- **Frekvence** – počet výskytů stejného jevu za jednotku času u periodického pohybu
- **Frekvence (úhlová)** – frekvence vynásobená 2π
- **Frekvence (vlastní)** – úhlová frekvence volného harmonického kmitání netlumené soustavy
- **Harmonický pohyb** – opakující se pohyb popsáný časově závislou sinovou nebo kosinovou funkcí
- **Matematický model** – model popsáný rovnicemi
- **Mechanický model** – reálné soustavy, v nichž jsou konstrukční součásti nahrazeny prvky idealizovaných vlastností
- **Netlumené kmitání** – kmitání při němž se neztrácí energie

Názvosloví z kmitání

- **Perioda** – čas potřebný k proběhnutí jednoho cyklu periodického pohybu; převrácená hodnota frekvence
- **Počáteční podmínky** – stav veličin na počátku děje (časově)
- **Počet stupňů volnosti** – počet nezávislých zobecněných souřadnic, které jednoznačně určují konfiguraci tělesa či soustavy
- **Rezonance** – jev, který nastává v případě rovnosti frekvence buzení s některou z vlastních frekvencí systému
- **Tlumení** – proces disipace energie
- **Volné kmitání** – kmitání bez účinku vnějšího buzení dané předepsanými počátečními podmínkami
- **Vynucené kmitání** – kmitání způsobené trvajícím vnějším buzením

Zdroj: Stejskal V., Okrouhlík M.: Kmitání s MATLABEM, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002