Odezva na obecnou periodickou budící funkci

Iva Petríková

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Obsah

- Fourierovy řady
- Odezva na polyharmonickou funkci
- Odezva na obecnou periodickou funkci
- Odezva na jednotkový skok
- Příklad – odezva na obdélníkovou funkci

Fourierova řada a výpočet jejích koeficientů

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega t \qquad F(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

Výpočet koeficientů

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$ pro n= 0,1,2…

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$ pro n= 1,2…

Vztahy mezi a_n , b_n , F_n , φ_n

$$F_0=\frac{a_0}{2} \qquad F_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \varphi_n=\mathrm{arctg}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Odezva na polyharmonickou funkci

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\sum_{n=1}^{N}F_n\sin\left(\omega_n t+\varphi_n\right)$$

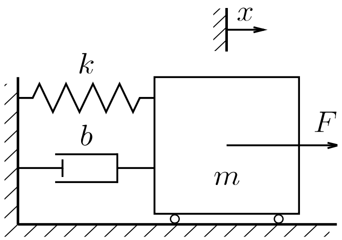
Pro lineární systém platí princip superpozice, partikulární řešení je ve tvaru polyharmonické funkce, ustálená odezva je dána součtem odezev na jednotlivé členy harmonické funkce

$$x\left(t\right)=\sum_{n=1}^{N}x_n\sin\left(\omega_n t+\vartheta_n\right)$$

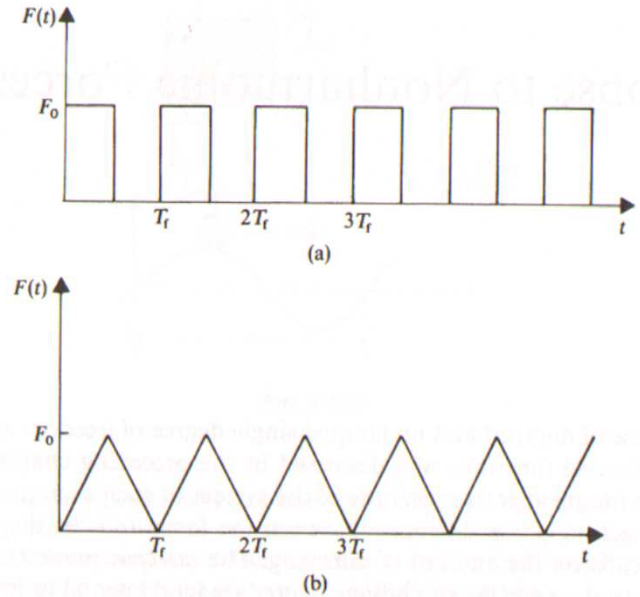
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Odezva na periodickou sílu

- Periodická síla se opakuje v určitém intervalu $F(t+T) = F(t)$
- *T* je perioda, *nT*
- Rovnice soustavy s 1 stupněm volnosti



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$



- *F(t)* vyjádříme pomocí Fourierovy řady

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

- nebo ve tvaru

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \qquad \omega_n = n\omega$$

Odezva na periodickou sílu

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Při řešení aplikujeme princip superpozice:

1) odezva systému na konstantní sílu F_0

$$x_{p0} = C$$

$$\dot{x}_{p0} = \ddot{x}_{p0} = C$$

$$m\ddot{x}_{p0} + b\dot{x}_{p0} + kx_{p0} = F_0$$

$$kC = F_0$$

$$x_{p0} = C = \frac{F_0}{k}$$

2) odezva na sílu $F_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$

Jedná se o odezvu na harmonickou funkci, řešeno v prezentaci 1st. volnosti II. část

$$x_{pn} = \frac{F_n / k}{\sqrt{\left(1-\eta_n^2\right)^2 + \left(2\zeta\eta_n\right)^2}} \sin(\omega_n t + \varphi_n - \psi_n)$$

kde $\eta_n = \dfrac{\omega_n}{\Omega} = \dfrac{n\omega}{\Omega} = n\eta \quad \Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Odezva na periodickou sílu

$$\psi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\zeta\eta_n}{1-\eta_n^2}\right)$$

Celkové řešení je dáno součtem

$$x(t) = x_h + x_p$$

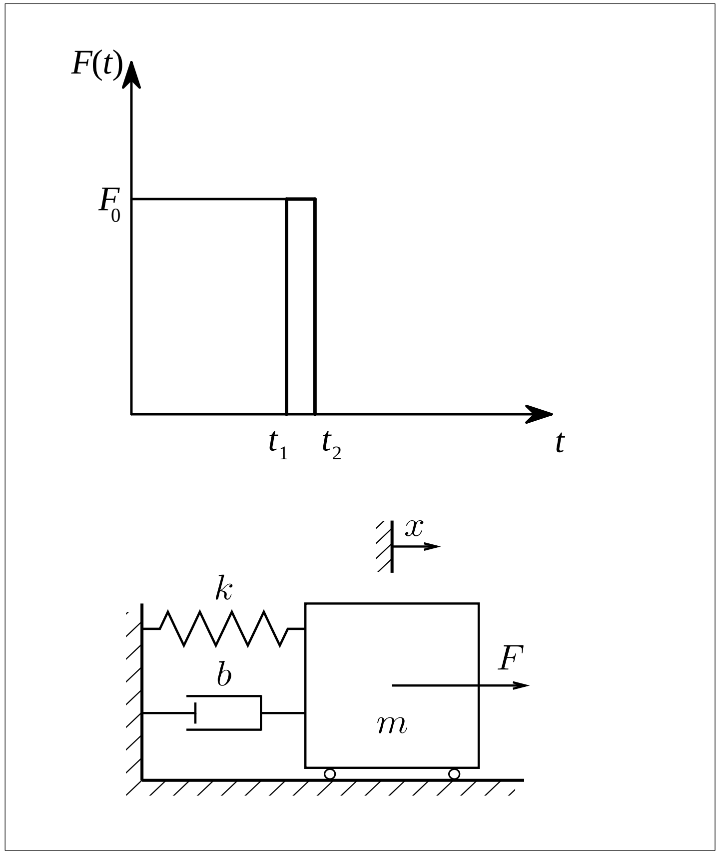
$$x_p = x_{p0} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{pn}$$

$$= \frac{F_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n / k}{\sqrt{\left(1-\eta_n^2\right)^2 + \left(2\zeta\eta_n\right)^2}} \sin\left(\omega_n t + \varphi_n - \psi_n\right)$$

Výpočet ustálené odezvy na periodickou funkci u soustavy s jedním stupněm volnosti je proveden v sw Mathcad – viz příklad

Odezva na impulzní sílu

Impulzní síla je definovaná jako síla, která má velkou hodnotu a působí ve velmi krátkém čase. Impulzní síla na obr. 1 působí na soustavu s jedním stupněm volnosti na obr. 2.



Platí diferenciální pohybová rovnice:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

Po integraci rovnice v časovém intervalu (t_1, t_2):

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt + \int_{t_1}^{t_2} b\dot{x}dt + \int_{t_1}^{t_2} kxdt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \qquad (1)$$

Na velmi malém časovém intervalu (t_1 , t_2) jsou hodnoty x a $\dot{x}$ konečné, limity 2. a 3. integrálu v rovnici (1) jsou nulové.

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n \sin(\omega_n t + \vartheta_n)$$

Odezva na impulzní sílu

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

kde $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$

$$\int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} m d\dot{x} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

$$m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

$$\triangle\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

kde $\triangle\dot{x}$ je skoková změna rychlosti hmoty způsobená působením Impulzní síly, kterou nazveme Impuls *I* a je definován:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

Pokud je Impuls roven jedné, je nazýván jednotkovým impulsem (jednotkovým skokem) a dostáváme

$$\triangle\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \frac{I}{m}$$

Výsledek ukazuje, že působení impulzní síly, která působí ve velmi krátkém časovém intervalu na soustavu, která byla na počátku v klidu, může být uvažován jako pohyb soustavy s počáteční rychlostí I/m a nulovou počáteční výchylkou. V tomto případě jde o volné kmitání soustavy s danou počáteční rychlostí.

Odezva na impulzní sílu

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

kde $\ddot{x} = d\dot{x} / dt$

$$\int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} m d\dot{x} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

$$m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

$$\triangle\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

kde $\triangle\dot{x}$ je skoková změna rychlosti hmoty způsobená působením Impulzní síly, kterou nazveme Impuls *I* a je definován:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

Pokud je Impuls roven jedné, je nazýván jednotkovým impulsem (jednotkovým skokem) a dostáváme

$$\triangle\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \frac{I}{m}$$

Výsledek ukazuje, že působení impulzní síly, která působí ve velmi krátkém časovém intervalu na soustavu, která byla na počátku v klidu, může být uvažován jako pohyb soustavy s počáteční rychlostí I/m a nulovou počáteční výchylkou. V tomto případě jde o volné kmitání soustavy (s podkritickým tlumením) s danou počáteční rychlostí.

Odezva na impulzní sílu

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$x(t) = Ce^{-\zeta\Omega t}\sin(\Omega_T t + \gamma)$$

$$\dot{x}(t) = -\zeta\Omega Ce^{-\zeta\Omega t}\sin(\Omega_T t + \gamma) +$$

$$+\Omega_T Ce^{-\zeta\Omega t}\cos(\Omega_T t + \gamma)$$

kde C, γ jsou konstanty, určené s počátečních podmínek, Ω je vlastní frekvence, Ω_D je vlastní frekvence tlumených kmitů, ζ je koeficient naladění.

Při aplikaci impulzní síly s lineárním impulsem *I* v čase t=0, jsou počáteční podmínky:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = \frac{I}{m}$$

Odtud počáteční výchylka vyjde 0 a γ je 0. Z rovnice pro rychlost dostáváme konstantu C a výsledná výchylka je

$$x(t) = \frac{I}{m\Omega_T} e^{-\zeta\Omega t}\sin\Omega_T t$$

$$\text{tj. } x(t) = I\,H(t)$$

kde fce H(t) se nazývá impulzní přenosová funkce

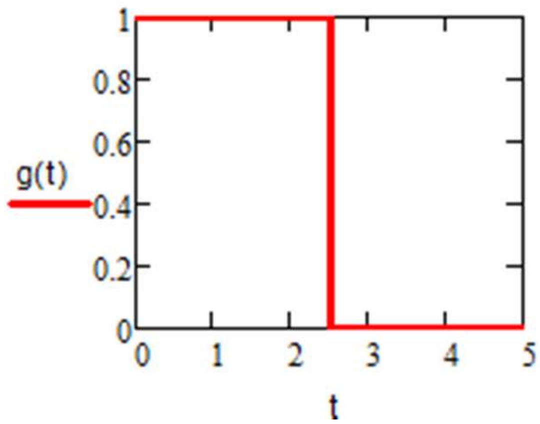
$$H(t) = \frac{1}{m\Omega_T} e^{-\zeta\Omega t}\sin\Omega_T t$$

Příklad – určení odezvy na obdélníkovou funkci

Výpočet koeficientů Fourierovy řady pro periodickou funkci f(t)

$f(t) = h \quad \text{pro} \quad 0 \le t < \frac{T}{2}$

$f(t) = 0 \quad \text{pro} \quad \frac{T}{2} \le t \le T$



Periodická funkce se dá vyjádřit jako součet spočetné množiny harmonických funkcí ve tvaru

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{oo} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)\right) \qquad \text{kde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t)\, dt \qquad \text{pro } k = 1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)\, dt \qquad \text{pro } k = 1,2,\ldots$$

Nahrazení funkce g(t) Fourierovou řadou

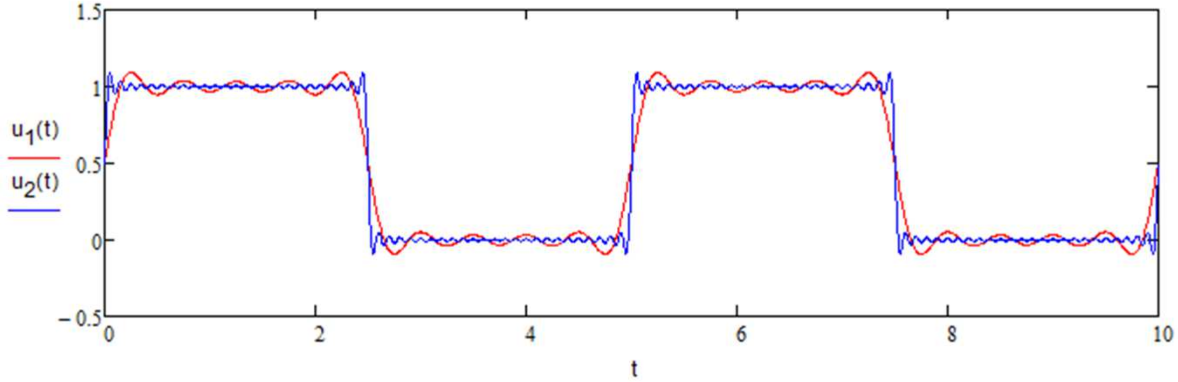
Výpočet pro k_{max} =10

$k_{max} := 10 \qquad T := 5 \qquad h := 1 \qquad t := 0, 0.005 .. 10$

$k := 1 .. k_{max} \qquad \omega := \frac{2\cdot\pi}{T}$

$$a_0 := h \qquad a_k := \frac{2}{T}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot T\cdot k\cdot\omega\right)}{k\cdot\omega}\cdot h \qquad b(k) := (-h)\cdot\frac{\cos(k\cdot\pi)-1}{k\cdot\pi}$$

$$u_1(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_{max}} \left(a_k\cdot\cos(k\cdot\omega\cdot t) + b(k)\cdot\sin(k\cdot\omega\cdot t)\right)$$



Výpočet pro k_{max} =50

$k_{mx} := 50$

$k := 1 .. k_{mx}$

$$a_k := \frac{2}{T}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot T\cdot k\cdot\omega\right)}{k\cdot\omega}\cdot h \qquad b_k := (-h)\cdot\frac{\cos(k\cdot\pi)-1}{k\cdot\pi}$$

$$u_2(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{50} \left(a_k\cdot\cos(k\cdot\omega\cdot t) + b_k\cdot\sin(k\cdot\omega\cdot t)\right)$$

Ustálená odezva funkce g(t)

Ustálená odezva

$$F_0 := \frac{a_0}{2}$$

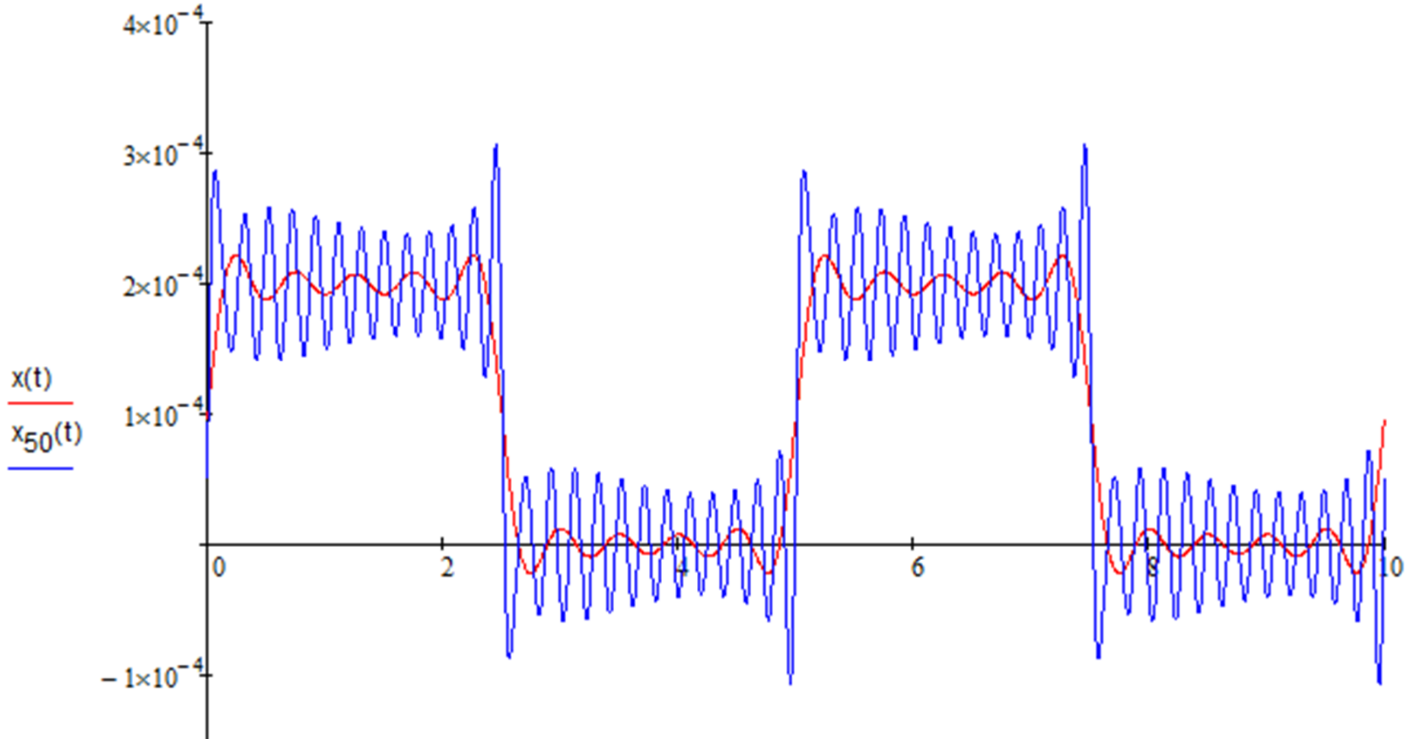
$$F_k := \sqrt{\left[(a_k)^2 + \left[(b_k)^2\right]\right]}$$

$$\psi_k := \operatorname{atan}\left[\frac{2\cdot\dfrac{b0}{2\cdot\sqrt{k1\cdot m}}\cdot\dfrac{k\cdot\omega}{\sqrt{\dfrac{k1}{m}}}}{1-\left(\dfrac{k\cdot\omega}{\sqrt{\dfrac{k1}{m}}}\right)^2}\right]$$

$$x(t) := \frac{F_0}{k1} + \sum_{k=1}^{10}\left[\left[\frac{b_k}{k1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{k\cdot\omega}{\sqrt{\dfrac{k1}{m}}}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot\dfrac{b0}{2\cdot\sqrt{k1\cdot m}}\cdot\dfrac{k\cdot\omega}{\sqrt{\dfrac{k1}{m}}}\right)^2}}\right]\cdot\sin(k\cdot\omega\cdot t-\psi_k)\right]$$

$$x_{50}(t) := \frac{F_0}{k1} + \sum_{k=1}^{50}\left[\left[\frac{b_k}{k1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{k\cdot\omega}{\sqrt{\dfrac{k1}{m}}}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot\dfrac{b0}{2\cdot\sqrt{k1\cdot m}}\cdot\dfrac{k\cdot\omega}{\sqrt{\dfrac{k1}{m}}}\right)^2}}\right]\cdot\sin(k\cdot\omega\cdot t-\psi_k)\right]$$

Ustálená odezva funkce g(t)



Průběh ustálené odezvy na funkci g(t) pro prvních k-členů řady

-------- k = 10;   -------- k = 50