

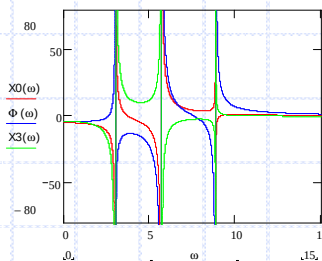
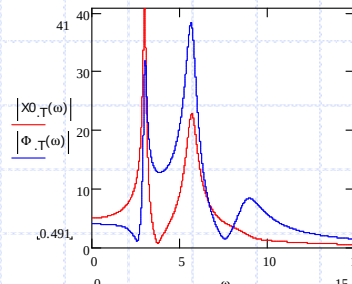
Kmitání soustav s n stupni volnosti

1.část

- 1 Netlumené volné kmitání
- 2 Vynucené kmitání netlumené soustavy
- 3 Vynucené kmitání tlumené soustavy
- 4 Příklad v programovém prostředí Mathcad a Adams
- 5 Příklad soustavy se dvěma stupni volnosti

Výchozí pohybová rovnice jednohmotové soustavy s jedním stupněm volnosti $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$

Maticový zápis pro soustavy s n stupni volnosti $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$

Volné kmitání	Vynucené kmitání netlumené	Vynucené kmitání tlumené
$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ $\mathbf{B} = \mathbf{0}, \mathbf{f} = \mathbf{0}$	$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ $\mathbf{B} = \mathbf{0}$	$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$
vlastní frekvence	harmonické buzení obecné buzení	harmonické buzení obecné buzení
vlastní tvary kmitů	amplitudy vynucených kmitů	amplitudy vynucených kmitů
$\text{OM} = \begin{pmatrix} 3.051 \\ 5.722 \\ 8.874 \end{pmatrix}$		

Netlumené volné kmitání $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (1)

◆ matice hmotnosti

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

◆ matice tuhosti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

◆ vektor zobecněných výchylek

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$$

$$\mathbf{q}_a = [q_{a1} \quad q_{a2} \quad \cdots \quad q_{an}]^T$$

◆ předpokládané řešení

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_a \sin(\omega t + \phi)$$

◆ druhá derivace

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}_a \sin(\omega t + \phi)$$

◆ dosazení do rovnice (1)

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_a \sin(\omega t + \phi) + \mathbf{K} \mathbf{q}_a \sin(\omega t + \phi) = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{q}_a = \mathbf{0}$$



vlastní frekvence
vlastní tvary kmitů

Vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů

- ◆ netriviální řešení

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$
- ◆ kořeny polynomu - vlastní čísla

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$$
- ◆ druhé odmocniny – vlastní frekvence

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$
- ◆ k ω_i přísluší vlastní vektor $\mathbf{q}_{ai}$

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \mathbf{q}_{ai} = \mathbf{0}$$
- ◆ netriviální řešení = vlastní tvary kmitů

soustava s n stupni volnosti má n vlastních frekvencí

Vynucené kmitání netlumené $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}$ (2)

- ◆ budící síla je dána **harmonickou funkcí** v kompl. tvaru
- ◆ $\mathbf{f}_0$ je vektor amplitud budících sil
- ◆ předp. řešení $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}$
kde $\tilde{\mathbf{q}}_a$ je vektor amplitud vynucených kmitů
- ◆ druhá derivace je
 $\ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\mathbf{q}}_a \omega^2 e^{i\omega t}$
- ◆ po dosazení do rovnice (2)
 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}$
$$\tilde{\mathbf{q}}_a = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{f}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0$$
- ◆ v případě rovnosti vlastních frekvencí soustavy s budící frekvencí, rostou amplitudy nade všechny meze

Vynucené kmitání tlumené

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

- ♦ budící síla je dána **harmonickou funkcí** v kompl. tvaru

- ♦ **B** je matice tlumení

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

- ♦ předp. řešení

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}$$

- ♦ první a druhá derivace

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = i\tilde{\mathbf{q}}_a \omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\tilde{\mathbf{q}}_a \omega^2 e^{i\omega t}$$

- ♦ po dosazení do rovnice (3)

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})\tilde{\mathbf{q}}_0 e^{i\omega t} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}$$

- ♦ amplitudy vynucených kmitů

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = (\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{f}_0 = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{f}_0$$

- ♦ výsledné amplitudy

$$\tilde{q}_{a1}, \tilde{q}_{a2}, \dots, \tilde{q}_{an}$$

jsou komplexní čísla

- ♦ velikost amplitudy je dána absolutní hodnotou

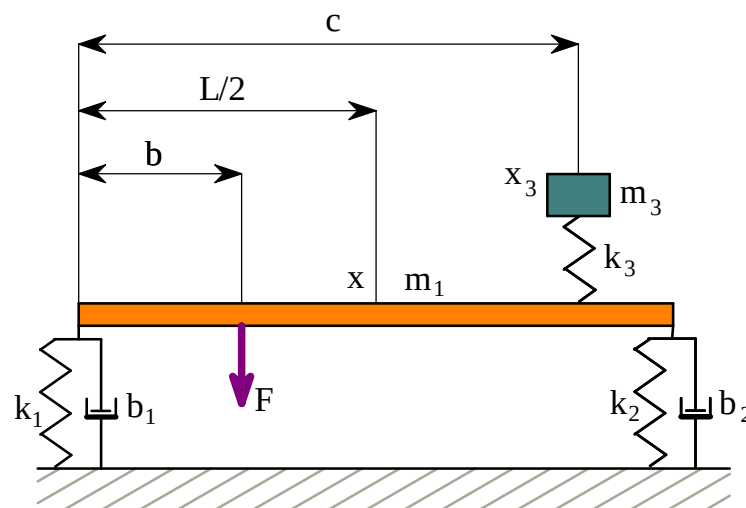
$$|\tilde{q}_{a1}|, |\tilde{q}_{a2}|, \dots, |\tilde{q}_{an}|$$

Řešení úloh kmitání v Mathcadu a Matlabu

- ◆ Mathcad
- ◆ Matlab
- ◆ jednoduchý maticový přístup k řešení
- ◆ využití některých jednoduchých příkazů pro výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitů

funkce	Mathcad	Matlab
vlastní frekvence Ω^2	$\text{eigenvals}(K \cdot M^{-1})$	[U,V]=eig(K,M), kde U je matice vlastních vektorů, V je diag. matice vl. čísel
vlastní tvary	$\text{eigenvecs}(K \cdot M^{-1})$	
i-tý vlastní tvar odp. vlastní frekvenci Ω_i	$\text{eigenvec}(K \cdot M^{-1}, \Omega_i^2)$	
amplitudy vynucených kmitů netlumená soustava	$Z = (K - \omega^2 \cdot M)^{-1} \cdot f$	$Z = [K - \omega^2 \cdot M] \backslash f$
amplitudy vynucených kmitů tlumená soustava	$Z = (K + i \cdot \omega \cdot B - \omega^2 \cdot M)^{-1} \cdot f$ Z je kompl. číslo $\rightarrow Z $	$Z = [K - \omega^2 \cdot M + i \cdot \omega \cdot B] \backslash f$ Z je kompl. číslo $\rightarrow \text{abs}(Z)$

Příklad – soustava se 3 stupni volnosti



$k_1 := 10$	$k_2 := k_1$	$k_3 := 10$	[N/m]	tuhosti
$m_1 := 1$	$m_3 := 0.5$		[kg]	hmotnosti
$L := 1$	$c := 0.8$	$b := 0.3$	[m]	rozměry
$\Omega := 0, 0.001.. 15$	$F_0 := 100$		[N]	síla
$b_1 := 0.3$	$b_2 := b_1$		[Ns/m]	koefficient tlumení

Pohybové rovnice soustavy v maticovém tvaru

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} q + K \cdot q = f$$

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot L^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & (k_1 - k_2) \cdot \frac{L}{2} - k_3 \cdot \left(c - \frac{L}{2}\right) & -k_3 \\ (k_1 - k_2) \cdot \frac{L}{2} - k_3 \cdot \left(c - \frac{L}{2}\right) & (k_1 + k_2) \cdot \frac{L^2}{4} + k_3 \cdot \left(c - \frac{L}{2}\right)^2 & k_3 \cdot \left(c - \frac{L}{2}\right) \\ -k_3 & k_3 \cdot \left(c - \frac{L}{2}\right) & k_3 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitů

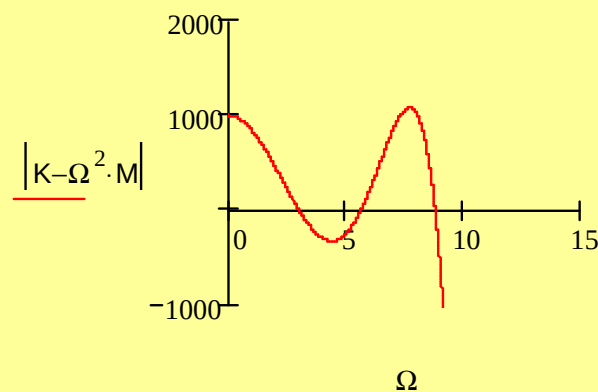
$$z(\Omega) := |K - \Omega^2 \cdot M| \quad (1) \quad Z(\Omega) := K - \Omega^2 \cdot M$$

A) nalezení kořenů rovnice (1)

$$\Omega_1 := 3 \quad v_1 := \text{root}(z(\Omega_1), \Omega_1) \quad v_1 = 3.051 \quad \frac{v_1}{2 \cdot \pi} = 0.486$$

$$\Omega_2 := 6 \quad v_2 := \text{root}(z(\Omega_2), \Omega_2) \quad v_2 = 5.722 \quad \frac{v_2}{2 \cdot \pi} = 0.911$$

$$\Omega_3 := 13 \quad v_3 := \text{root}(z(\Omega_3), \Omega_3) \quad v_3 = 8.874 \quad \frac{v_3}{2 \cdot \pi} = 1.412$$



B) výpočet podle předdefinovaných funkcí

$$z1 := \text{eigenvals}(K \cdot M^{-1})$$

$$z1 = \begin{pmatrix} 9.309 \\ 32.736 \\ 78.755 \end{pmatrix}$$

$$OM := \sqrt{z1}$$

$$OM = \begin{pmatrix} 3.051 \\ 5.722 \\ 8.874 \end{pmatrix}$$

vlastní frekvence [s⁻¹]

$$v := \text{eigenvecs}(K \cdot M^{-1})$$

$$v = \begin{pmatrix} 0.656 & 0.924 & 0.64 \\ -0.042 & 0.13 & -0.602 \\ 0.754 & -0.36 & -0.478 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(K \cdot M^{-1}, z1_1) = \begin{pmatrix} 0.656 \\ -0.042 \\ 0.754 \end{pmatrix}$$

Amplitudy ustálených vynucených kmitů - netlumený systém

$$\omega := \Omega \quad f_0 := \begin{bmatrix} -F_0 \\ -F_0 \cdot \left(\frac{L}{2} - b \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z(\omega) := K - \omega^2 M \quad X(\omega) := Z(\omega)^{-1} \cdot f_0$$

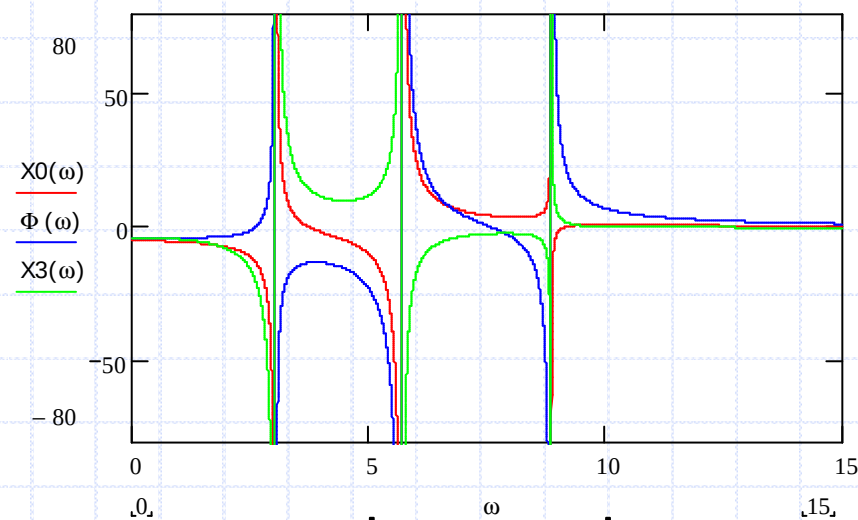
$$X_0(\omega) := X(\omega)_1 \quad \Phi(\omega) := X(\omega)_2 \quad X_3(\omega) := X(\omega)_3$$

Amplitudy ustálených vynucených kmitů - tlumený systém

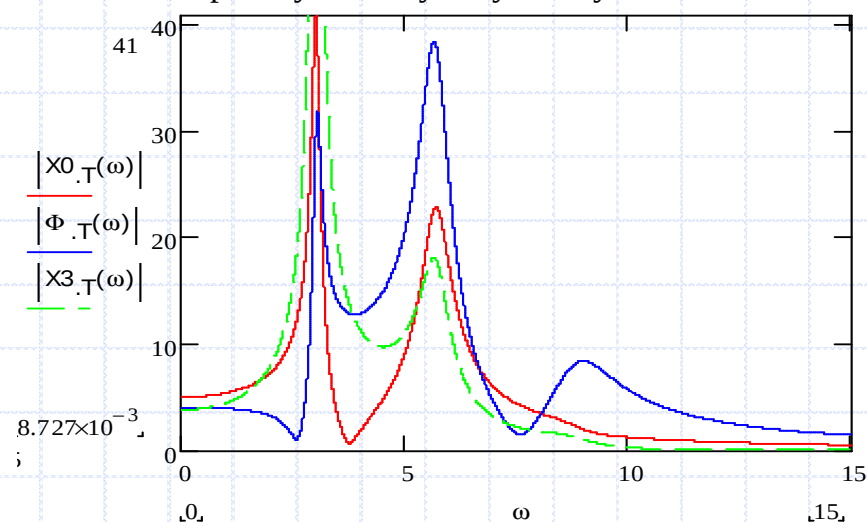
$$B := \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & (b_1 - b_2) \cdot \frac{L}{2} & 0 \\ (b_1 - b_2) \cdot \frac{L}{2} & (b_1 + b_2) \cdot \frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_T(\omega) := K - \omega^2 M + i \cdot \omega \cdot B \quad X_T(\omega) := Z_T(\omega)^{-1} \cdot f_0$$

$$X_{0T}(\omega) := X_T(\omega)_1 \quad \Phi_T(\omega) := X_T(\omega)_2 \quad X_{3T}(\omega) := X_T(\omega)_3$$



Amplitudy ustálených vynucených kmitů, B=0



Amplitudy ustálených vynucených kmitů

Multibody Dynamics - MSC.Adams

- ♦ programové prostředí pro řešení dynamiky pohybujících se prvků, těles a soustav těles, vytváření modelů a slouží pro kinematické, statické, kvazi-statické, a dynamické simulace. Výsledky je možné zobrazit v grafech, barevných animacích apod.

