Nauka o Kmitání – Přednáška č. 4

Odezva lineárního systému na obecnou periodickou budící funkci

Ing. Antonín Skarolek, Ph.D.

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti
Technická Univerzita v Liberci

2013

Polyharmonickou funkcí (trigonometrickým polynomem) budeme rozumět funkci, která je součtem nejvýše spočetného množství harmonických funkcí:

$$f(t) = f_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + f_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \cdots + f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Zkráceně:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Úhlové rychlosti ω_i a fáze φ_i jednotlivých komponent mohou být libovolné.

Poznámka:

- Pokud jsou všechny vzájemné poměry $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ racionální, je $f(t)$ periodická.
- Pokud výše uvedené neplatí, není $f(t)$ periodická. (Kvaziperiodická fce)

Polyharmonickou funkci $f(t)$ lze vyjádřit kromě fázového tvaru i ve tvaru goniometrickém

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t),$$

případně v tvaru komplexním pomocí ryze imaginárních exponenciál (rotujících fázorů):

$$f(t) = \Re \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t} + \hat{c}_i^* \mathrm{e}^{-j\omega_i t} \right).$$

Imaginární jednotku značíme $j = \sqrt{-1}$, symbol $\hat{c}^*$ značí komplexně sdružené číslo k číslu $\hat{c}$.

Uvažujme lineární systém s jedním stupněm volnosti s výchylkou $x(t)$, který je buzen polyharmonickou silou. Pohybová rovnice tohoto systému je

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Protože je uvedený systém lineární a platí tedy princip superpozice, hledáme partikulární řešení opět jako polyharmonickou funkci

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cos(\omega_i t + \vartheta_i).$$

Hledáme ustálenou odezvu $x(t)$ jako součet odezev na dílčí harmonické členy obsažené ve funkci $f(t)$

Ustálenou odezvu LS na harmonické buzení už najít umíme. S výhodou využijeme komplexní tvar harmonické funkce a hledejme partikulární řešení jako součet již známých odezev na dílčí harmonické funkce:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t},$$

kde jsou jednotlivé komplexní amplitudy $\hat{x}_i$ určeny

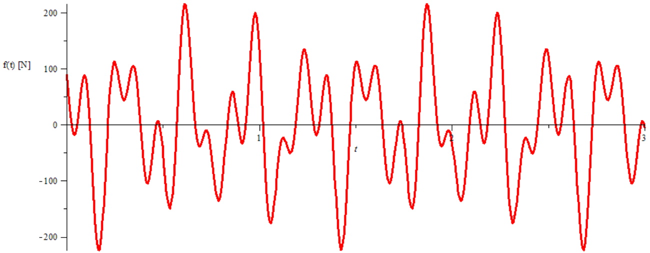
$$\hat{x}_i = G(j\omega_i)\hat{c}_i = \frac{\hat{c}_i}{-m\omega_i^2 + j\omega b + k},$$

takže

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t}}{-m\omega_i^2 + j\omega_i b + k}.$$

Lineární jednohmotový systém s parametry $m = 5\,\mathrm{kg}$, $k = 5000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $b = 20\,\mathrm{Ns\,m^{-1}}$ je buzen polyharmonickou silou $f(t)$ se třemi harmonickými složkami:

$$f(t) = 100\cos(20t) + 50\cos(35t + \pi) + 80\cos(50t + \frac{\pi}{3}). \qquad [\mathrm{N}]$$



$$f_1 = 100,\ f_2 = 50,\ f_3 = 80. \qquad [\mathrm{N}]$$

$$\omega_1 = 20,\ \omega_2 = 35,\ \omega_3 = 50. \qquad [\mathrm{rad\,s^{-1}}]$$

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = \frac{\pi}{3}. \qquad [\mathrm{rad}]$$

Připomenutí:

$$A\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)\right)=A\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}=A\mathrm{e}^{j\varphi}\mathrm{e}^{j\omega t}=\hat{A}\mathrm{e}^{j\omega t}.$$

Naši komplexní budicí sílu zapišeme jako

$$\hat{f}(t)=\sum_{i=1}^{3}\hat{c}_i\mathrm{e}^{j\omega_i t}=\sum_{i=1}^{3}f_i\mathrm{e}^{j\varphi_i}\mathrm{e}^{j\omega_i t}.$$

$$\hat{f}(t)=f_1\mathrm{e}^{j\varphi_1}\mathrm{e}^{j\omega_1 t}+f_2\mathrm{e}^{j\varphi_2}\mathrm{e}^{j\omega_2 t}+f_3\mathrm{e}^{j\varphi_3}\mathrm{e}^{j\omega_3 t}.$$

$$\hat{f}(t)=\hat{c}_1\mathrm{e}^{j\omega_1 t}+\hat{c}_2\mathrm{e}^{j\omega_2 t}+\hat{c}_3\mathrm{e}^{j\omega_3 t},$$

Po dosazení

$$\begin{aligned}\hat{c}_1&=f_1\,\mathrm{e}^{j\varphi_1}=f_1=100,\\ \hat{c}_2&=f_2\,\mathrm{e}^{j\varphi_2}=50\,\mathrm{e}^{j\pi}=-50,\\ \hat{c}_3&=f_3\,\mathrm{e}^{j\varphi_3}=80\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}=40(1+\sqrt{3}\,j).\end{aligned}$$

Komplexní výchylka $\hat{x}(t)$ je součtem odezev na jednotlivé harmonické funkce

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} G(j\omega_i)\,\hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t},$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t}}{-m\omega_i^2 + j\omega_i b + k},$$

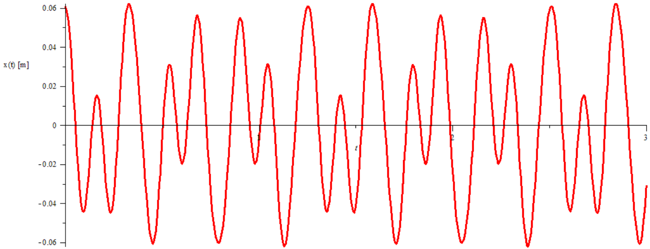
$$\hat{x}(t) = \frac{\hat{c}_1 \mathrm{e}^{j\omega_1 t}}{-m\omega_1^2 + j\omega_1 b + k} + \frac{\hat{c}_2 \mathrm{e}^{j\omega_2 t}}{-m\omega_2^2 + j\omega_2 b + k} + \frac{\hat{c}_3 \mathrm{e}^{j\omega_3 t}}{-m\omega_3^2 + j\omega_3 b + k}.$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1 \mathrm{e}^{j\omega_1 t} + \hat{x}_2 \mathrm{e}^{j\omega_2 t} + \hat{x}_3 \mathrm{e}^{j\omega_3 t}$$

Dále bychom pokračovali dosazením parametrů, usměrněním zlomků a převedením zpět do goniometrického či fázového tvaru. Tuto práci je ovšem v praktických případech lépe přenechat stroji. Reálná část $\hat{x}(t)$ je hledané řešení $x(t)$.

Přibližný výsledek je

$$x(t) \doteq 0.033\cos(20t-0.13)+0.038\cos(35t+0.56)+0.011\cos(50t-1.96).$$



Pokud na systém působí obecná periodická síla $f(t)$ s periodou T, platí

$$f(t) = f(t+T) = f(t+kT), \qquad k = 0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n.$$

Předpokládejme nejprve, že tuto funkci lze nahradit součtem nekonečné řady harmonických funkcí a vyberme si jejich komplexní exponenciální tvar.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \mathrm{e}^{jk\omega_1 t}.$$

ω_1 je základní úhlová frekvence určená $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Hledáme tedy kombinaci harmonických funkcí s periodami $\frac{T}{k}$. (A tím periodické i s periodou T). Podaří-li se nám najít koeficienty $\hat{c}_k$ tak, aby výše uvedená rovnice platila, budeme moci zacházet s obecnou periodickou funkcí jako s funkcí polyharmonickou.

Potřebné koeficienty lze nalézt následujícím postupem. Vynásobme rovnici jednou harmonickou funkcí (s periodou $\frac{T}{m}$) a integrujme přes celou periodu

$$\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{jm\omega_1 t}\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\mathrm{e}^{jm\omega_1 t} \right) \mathrm{d}t.$$

Snadnou úpravou (integrál součtu = součet integrálů)

$$\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{jm\omega_1 t}\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \int_0^T \mathrm{e}^{j(k+m)\omega_1 t}\mathrm{d}t.$$

Nyní se podívejme na dva možné případy:

$$k = -m : \qquad \int_0^T \mathrm{e}^{j(k+m)\omega_1 t}\mathrm{d}t = \int_0^T 1\mathrm{d}t = T,$$

$$k \neq -m : \qquad \int_0^T \mathrm{e}^{j(k+m)\omega_1 t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{j(k+m)\omega_1 t}}{j(k+m)\omega_1} \right]_0^T = 0.$$

Z původního nekonečného součtu nám tak zbyde pouze jedinný člen

$$\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{jm\omega_1 t}\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \int_0^T \mathrm{e}^{j(k+m)\omega_1 t}\mathrm{d}t = T\hat{c}_{-m}.$$

A to je rovnice pro hledaný ($-m$-tý) koeficient Fourierovy řady. m jsme si ovšem volili libovolně, takže pomocí výše uvedené rovnice můžeme spočíst koeficienty všechny:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t.$$

Z matematického hlediska by bylo potřeba vyjasnit, pro jaké třídy funkcí je uvedený postup korektní a proveditelný. Nebude se tímto do hloubky zabývat, jen si řekneme, že pro všechny reálné praktické případy funkce $f(t)$ uvedenou řadu lze takto setrojit. Dokonce má tato řada příjemnou vlastnost v tom, že většinou stačí několik málo jejích členů k věrné aproximaci $f(t)$.

Pozn: Fourierova řada je velmi obecný nástroj, který nemusí být omezen na součet harmonických funkcí. Pro naše účely si ovšem s harmonickými funkcemi zcela vystačíme.

Trigonometrickou Fourierovu řadu je možné vyjádřit i v goniometrickém tvaru

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t)$$

s koeficienty

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

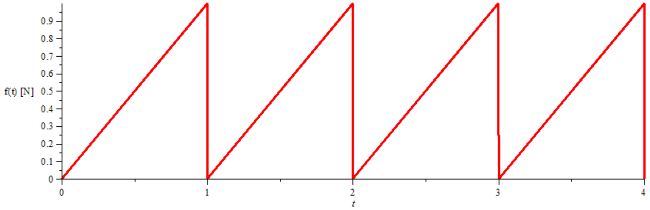
Nebo ve tvaru fázovém

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_k t + \varphi_k),$$

s parametry

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \varphi_k = \mathrm{arctg}\frac{b_k}{a_k}.$$

Použijme lineární jednohmotový systém z předchozího příkladu s parametry $m = 5\,\mathrm{kg}$, $k = 5000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $b = 20\,\mathrm{Ns\,m^{-1}}$.
Na tento systém působí periodická proměnná síla pilovitého průběhu s periodou T a amplitudou F definovaná v jedné periodě jako
$f(t) = F \cdot (\frac{t}{T})$ pro $t \in \langle 0, T)$.
Pro $F = 1\mathrm{N}$ a $T = 1\mathrm{s}$ je průběh funkce $f(t)$:



Spočtěme si koeficienty Fourierovy řady podle předpisu

$$\hat{c}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{Ft}{T}\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi k t}{T}}\mathrm{d}t.$$

integrál na pravé straně lze vypočíst analyticky

$$\hat{c}_0 = \frac{F}{2}, \hat{c}_k = \frac{jF}{2k\pi}, \text{ pro } k \neq 0.$$

Funkci $f(t)$ tedy nahradíme

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \mathrm{e}^{jk\omega_1 t}.$$

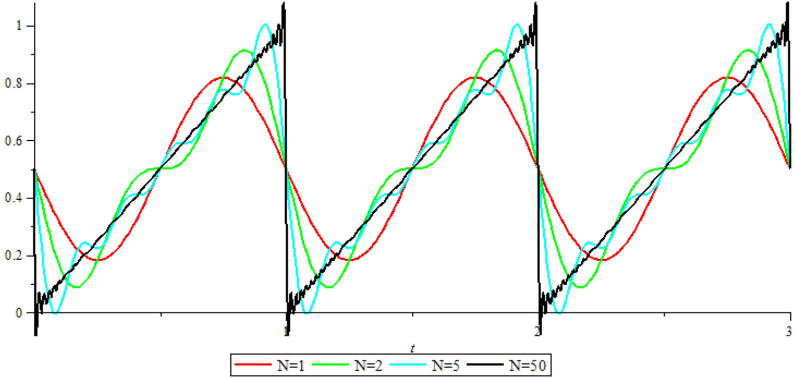
$$f(t) = \frac{F}{2} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{jF}{2k\pi}\mathrm{e}^{j\frac{2\pi k t}{T}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{jF}{2k\pi}\mathrm{e}^{j\frac{2\pi k t}{T}}.$$

Další jednoduchou úpravou bychom se dostali k

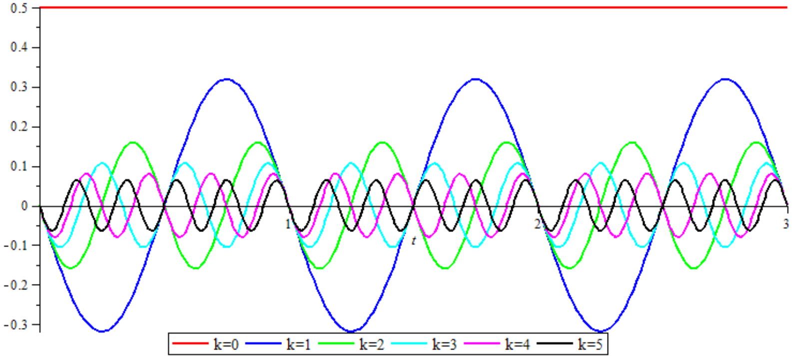
$$f(t) = \frac{F}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F}{k\pi} \frac{\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi kt}{T}} - \mathrm{e}^{j\frac{2\pi kt}{T}}}{2j} = \frac{F}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-F}{k\pi} \sin\frac{2\pi kt}{T}.$$

Tento výsledek samozřejmě odpovídá tomu, co bychom obdrželi při použití Fourierovy řady v goniometrickém tvaru. Náš pilovitý průběh síly je tedy složen z konstanty (nultá harmonická složka) a nekonečného počtu harmonických složek s frekvencemi **celých** násobků základní frekvence určené periodou původní funkce.
Všimněte si, že koeficienty jednotlivých harmonických postupně klesají s tím, jak roste jejich frekvence. To nám dovoluje uvažovat pouze N prvních členů řady pro přijatelnou aproximaci téměř libovolné periodické funkce.

Náhrada funkce $f(t)$ prvními harmonickými členy Fourierovy řady do řádu N včetně



Několik prvních členů řady



Ustálené vynucené kmitání našeho LS sestavíme v souladu s úvodem dnešní přednášky jako ustálenou odezvu na polyharmonické buzení.

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(j\omega_i)\, \hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t}.$$

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t}}{-m\omega_i^2 + j\omega_i b + k}, \qquad \omega_i = \frac{2\pi i}{T}.$$

Zde se nenechte příliš zmást zápornými úhlovými rychlostmi. Jedná se o dvojice komplexně sdružených fázorů rotujících v opačném smyslu. (Pro reálné budící funkce nám vyjdou koeficienty $\hat{c}_k$ a $\hat{c}_{-k}$ nutně komplexně sdružené, což má za následek, že celá řada zůstane na reálné ose.)

Po dosazení za koeficienty $\hat{c}_i$

$$x(t) = \frac{F}{2k} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F}{2\pi i} \left(\frac{j\mathrm{e}^{j\omega_i t}}{-m\omega_i^2 + j\omega_i b + k} - \frac{j\mathrm{e}^{-j\omega_i t}}{-m\omega_i^2 - j\omega_i b + k} \right).$$

Usměrněním a vytýkáním dostaneme

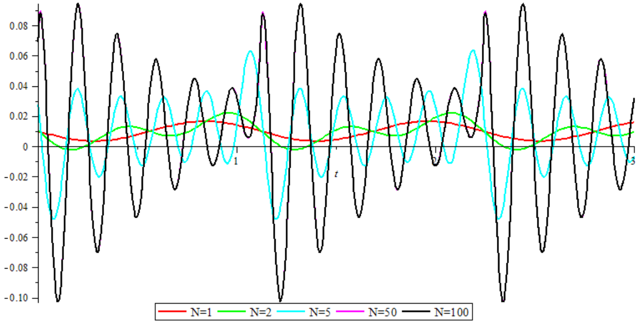
$$x(t) = \frac{F}{2k} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F}{\pi i \left((k - m\omega_i^2)^2 + \omega_i^2 b^2 \right)} \left(b\omega_i \frac{\mathrm{e}^{j\omega_i t} + \mathrm{e}^{-j\omega_i t}}{2} - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots - (k - m\omega_i^2) \frac{\mathrm{e}^{j\omega_i t} - \mathrm{e}^{-j\omega_i t}}{2j} \right).$$

Výsledně je odezva systému na buzení pilovitou funkcí

$$x(t) = \frac{F}{2k} + \frac{F}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b\omega_i \cos(\omega_i t) + (m\omega_i^2 - k)\sin(\omega_i t)}{i\left((k - m\omega_i^2)^2 + \omega_i^2 b^2\right)}, \qquad \omega_i = i\omega_1 = \frac{2i\pi}{T}.$$

Zvolme si třeba $F = 100\,\mathrm{N}$ a $T = 1.12\,\mathrm{s}$. Ustálenou odezvu systému je opět možno aproximovat několika prvními členy řady.



- Nejprve rozložíme vstupní periodickou funkci na součet harmonických funkcí
- Spočteme odezvy systému na tyto dílčí složky a dílčí odezvy sečteme
- Pokud není systém lineární, neplatí princip superpozice a nemůžeme tento postup aplikovat

- Koeficienty Fourierových řad mnoha funkcí je možno najít v tabulkách v literatuře
- Koeficienty Fourierových řad je možno počítat numericky
- Na únavnou práci používejte stroje

Amplitudo-frekvenční charakteristiku slabě tlumeného LS s jedním stupněm volnosti a harmonickým buzením obsahuje jedinou rezonanci, pokud $\omega = \Omega\sqrt{(1-\zeta^2)}$.
Pokud ovšem budíme takový systém obecnou periodickou funkcí, může se do shody s vlastní frekvencí systému dostat jakákoliv harmonická složka, kterou vstupní funkce obsahuje. Podívejme se ještě jednou na odezvu systému na obecnou periodickou funkci

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{c}_i \mathrm{e}^{j\omega_i t}}{-m\omega_i^2 + j\omega_i b + k}, \qquad \omega_i = i\omega_1 = \frac{2\pi i}{T}.$$

Rezonance jednotlivých harmonických složek je možné očekávat pro maxima (v absolutní hodnotě) dílčích přenosových funkcí

$$G(j\omega_i) = \frac{1}{-m\omega_i^2 + j\omega_i b + k},$$

která nastanou pro minimuma absolutních hodnot jmenovatelů.

Hledáme extrém klasickým způsobem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_i}\left((k - m\omega_i^2)^2 + \omega_i^2 b^2\right) = 0,$$

$$\omega_i \left(b^2 - km + m^2\omega_i^2\right) = 0,$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{m^2}} = \Omega\sqrt{1 - \zeta^2},$$

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{i}\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Rezonance tedy může nastat, pokud se frekvence základní harmonické složky, určená periodou budící funkce $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ přibliží k 1/i-násobku vlastní frekvence, což odpovídá přiblížení i-té harmonické složky k vlastní frekvenci systému.

Amplitudy jednotlivých harmonických složek

$$X_i(\omega_1) = |G(\omega_i)\hat{c}_i| + |G(\omega_{-i})\hat{c}_{-i}| = 2\sqrt{\frac{\hat{c}_i\hat{c}_i^*}{(k - m\omega_i^2)^2 + \omega_i^2 b^2}}$$

$$X_i(\omega_1) = 2\sqrt{\frac{\hat{c}_i\hat{c}_i^*}{(k - mi^2\omega_1^2)^2 + i^2\omega_1^2 b^2}}.$$

Použijme opět předešlý příklad LS buzeného pilovým průběhem síly a dosaďme koeficienty $\hat{c}_i$.

$$X_0(\omega_1) = \frac{F}{2k},$$

$$X_i(\omega_1) = \frac{F}{\pi i\sqrt{(k - mi^2\omega_1^2)^2 + i^2\omega_1^2 b^2}}, \qquad i \neq 0.$$

Amplitudové charakteristika, výskyt rezonancí vyšších harmonických složek, Campbellův diagram.