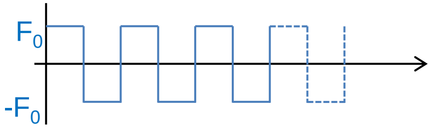
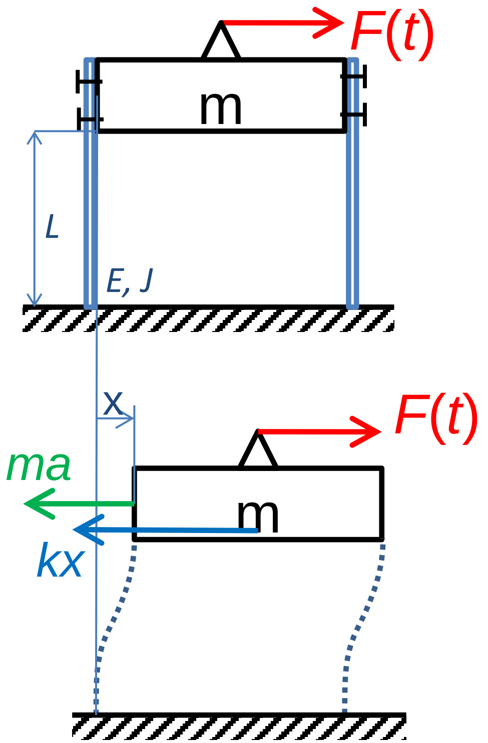
KMS – cvičení 2

Ondřej Marek

VYNUCENÉ KMITÁNÍ (netlumené)

Příklad: Stoleček na 4 listových pružinách budí periodická síla F(t). Odvoďte průběh výchylky v čase v závislosti na budící frekvenci, když je F(t) (a) harmonická, (b) periodická obdélníková





m = 5 kg

E = 2.1e^{11} Pa

L = 0.2m

průřez list. pružiny:
[**axb**]=15 mm x 2 mm

počet pružin: 4

F harmonická

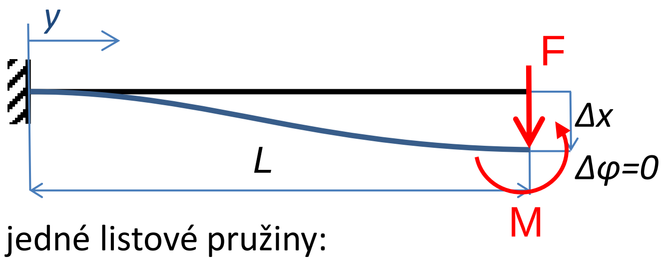
F_0 = 500 N

x(0) = 10 mm

v(0) = 0 m/s

$$a = \ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

k = ?



Výpočet tuhosti jedné listové pružiny:

Pozor! $k \neq \frac{3EJ}{l^3}$

$$M_o = F(L-x) - M$$

$$\Delta x = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EJ}\int_0^L M_o(y)\frac{\partial M_o(y)}{\partial F}dy = \frac{1}{EJ}\int_0^L (F(L-y) - M)(L-y)dy$$

$$\Delta x = \frac{1}{EJ}\left(\frac{FL^3}{3} - \frac{ML^2}{2}\right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{EJ}\int_0^L M_o(y)\frac{\partial M_o(y)}{\partial M}dy = \frac{1}{EJ}\int_0^L (F(L-y) - M)(-1)dy$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{EJ}\left(ML - \frac{FL^2}{2}\right) = 0$$

$$M = \frac{FL}{2}$$

$$\Delta y = \frac{F}{EJ}\left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{4}\right) = \frac{FL^3}{12EJ}$$

$$k_1 = \frac{F}{\Delta x} = \frac{12EJ}{L^3}$$

Celková tuhost 4 paralelních pružin:

$$k = 4k_1 = \frac{48EJ}{L^3}$$

$$k = \frac{48E}{L^3}\frac{ab^3}{12} = \frac{4Eab^3}{L^3} = 1.26 \cdot 10^4\ Nm^{-1}$$

VYNUCENÉ KMITÁNÍ (2)

Řešení:
$x = x_H + x_P$

1. Homogenní řešení

$m\ddot{x}_H + kx_H = 0$

$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\Omega$

$x_H = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$

2. Partikulární řešení

$m\ddot{x}_P + kx_P = F(t)$

Pokud je F(t) harmonická, pak $F(t) = F_0 \sin \omega t$

Odhad partikulárního ř.:
$x_P = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$
$\dot{x}_P = \omega X_0 \cos(\omega t + \varphi)$
$\ddot{x}_P = -\omega^2 X_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$(k - m\omega^2)X_0 \sin(\omega t + \varphi) = F_0 \sin \omega t$
$(k - m\omega^2)X_0[\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi] = F_0 \sin \omega t$

z rovnosti koeficientů u $\sin \omega t$: $(k - m\omega^2)X_0 \cos \varphi = F_0$
z rovnosti koeficientů u $\cos \omega t$: $(k - m\omega^2)X_0(-\sin \varphi) = 0$
$\sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi = 0 + k\pi$

$X_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2 \cos \varphi} = \pm \frac{F_0}{k - m\omega^2}$

$|X_0| = \left|\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right|$

Pro $\varphi = 0$

$x_P = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$

$\frac{x_P(t)}{F(t)} = G(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2}$ $\quad G(\omega)$ - dynamická poddajnost

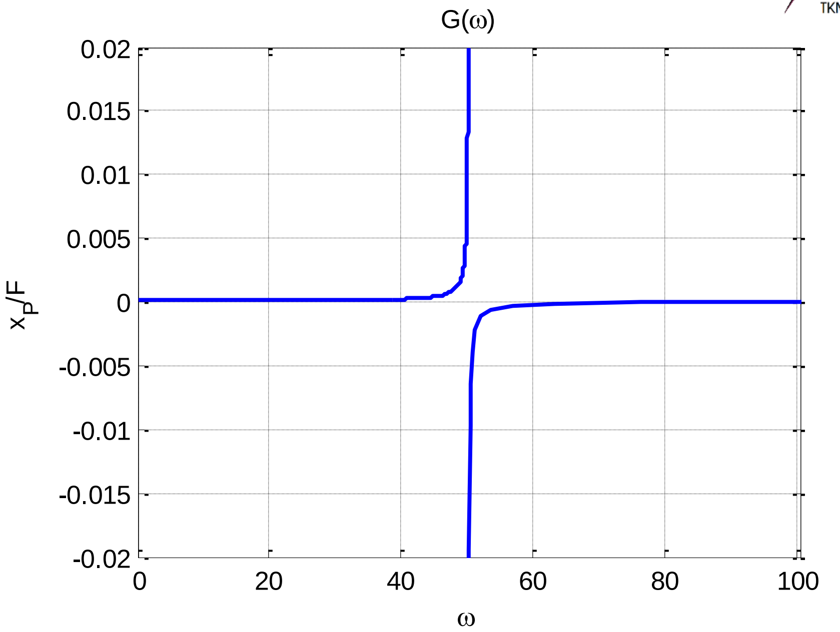
VYNUCENÉ KMITÁNÍ (3)

Dynamická poddajnost $G(\omega)$ je amplituda vynucené výchylky vyvolaná jednotkovou harmonickou silou

$$G(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2}$$

Vlastní frekvence

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50.2\, rad \cdot s^{-1}$$



$$x_{st} = \frac{F_0}{k}$$

$$\frac{x_P}{x_{st}} = \Gamma(\omega) = kG(\omega) = \frac{k}{k - m\omega^2}$$

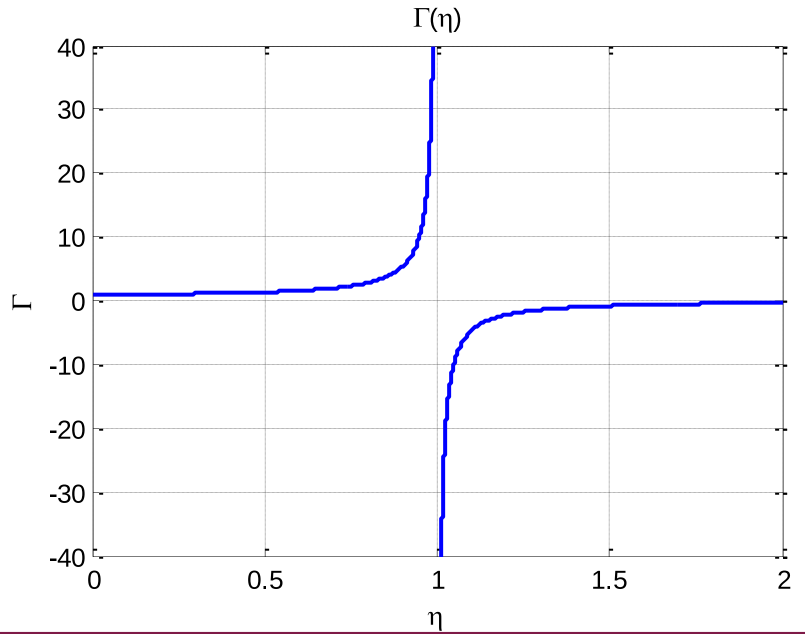
$\Gamma(\omega)$ - bezrozměrná výchylka

$$\Gamma(\omega) = kG(\omega) = \frac{k}{k - m\omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}$$

Činitel naladění η – poměr budící frekvence a vlastní frekvence soustavy

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega}$$

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{1 - \eta^2}$$



VYNUCENÉ KMITÁNÍ (4)

3. Celkové řešení

$$x = x_H + x_P$$
$$x(t) = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t} + X_0 \sin(\omega t)$$
$$\dot{x}(t) = i\Omega C_1 e^{i\Omega t} - i\Omega C_2 e^{-i\Omega t} + \omega X_0 \cos(\omega t)$$

Poč. podmínky:

$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = v_0$$
$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0$$
$$\dot{x}(0) = i\Omega C_1 - i\Omega C_2 + \omega X_0 = i\Omega(C_1 - C_2) + \omega X_0 = v_0$$

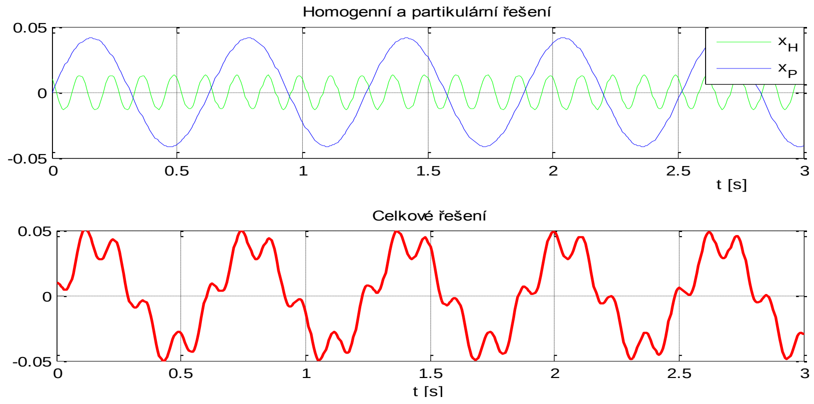
$$C_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2i\Omega} = \frac{x_0}{2} - i\frac{v_0 - \omega X_0}{2\Omega}$$
$$C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2i\Omega} = \frac{x_0}{2} + i\frac{v_0 - \omega X_0}{2\Omega}$$
$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} - i\frac{v_0 - \omega X_0}{2\Omega}\right) e^{i\Omega t} + \left(\frac{x_0}{2} + i\frac{v_0 - \omega X_0}{2\Omega}\right) e^{-i\Omega t} + X_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0 \left(\frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}\right) + i\frac{v_0 - \omega X_0}{\Omega}\left(\frac{e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}}{2}\right) + X_0 \sin(\omega t)$$
$$x(t) = x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0 - \omega X_0}{\Omega} \sin \Omega t + X_0 \sin(\omega t)$$
$$X_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

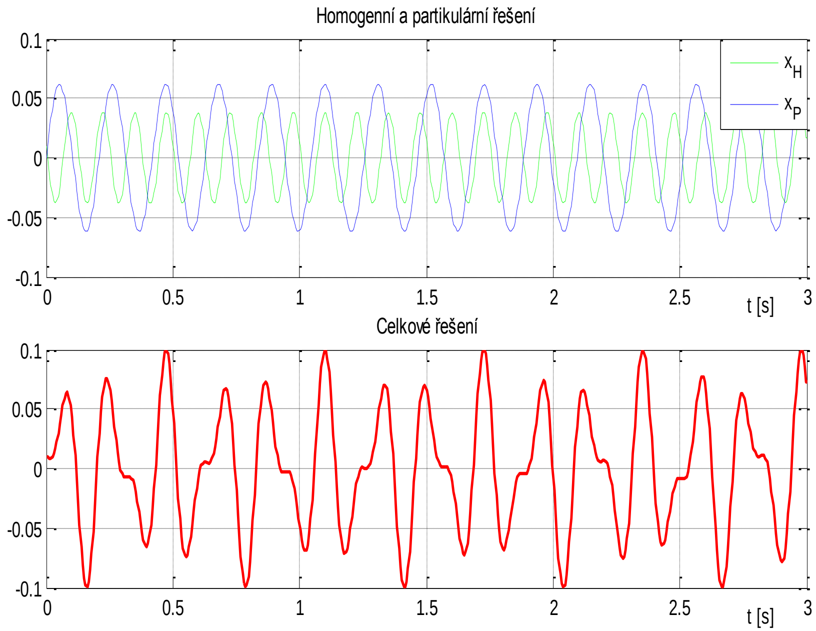
Pomocí přenosu G(ω):

$$x(t) = x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0 - \omega G(\omega) F_0}{\Omega} \sin \Omega t + G(\omega) F_0 \sin \omega t$$

Celkové řešení x(t) pro budící frekvenci ω=10 rad.s^{-1}

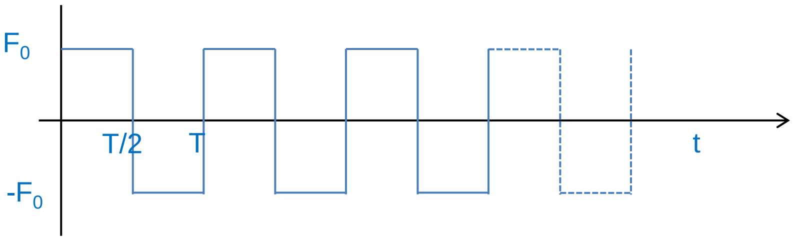


Celkové řešení x(t) pro budící frekvenci ω=30 rad.s^{-1}



PERIODICKÉ BUZENÍ NEHARMONICKÉ

Pokračování příkladu
Co s obecnou periodickou silou?



Náhrada Fourierovým rozvojem:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt$$

Náhrada obdélníkového průběhu síly Fourierovým rozvojem do k=3:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=0$$

$$a_1=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\cos\frac{2\pi}{T}t\,dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-F_0)\cos\frac{2\pi}{T}t\,dt\right)=0$$

$$b_1=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\sin\frac{2\pi}{T}t\,dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-F_0)\sin\frac{2\pi}{T}t\,dt\right)=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\sin\frac{2\pi}{T}t\,dt=\frac{4F_0}{\pi}$$

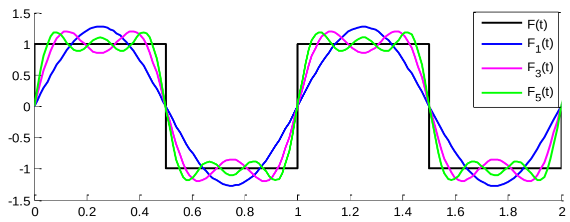
$$a_2=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\cos\frac{4\pi}{T}t\,dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-F_0)\cos\frac{4\pi}{T}t\,dt\right)=0;\quad b_2=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\sin\frac{4\pi}{T}t\,dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-F_0)\sin\frac{4\pi}{T}t\,dt\right)=0$$

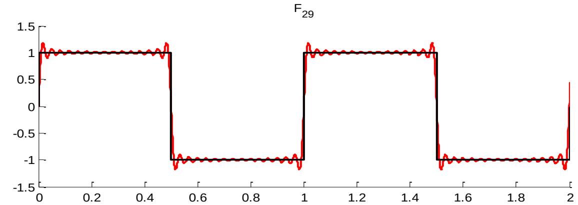
$$a_3=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\cos\frac{6\pi}{T}t\,dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-F_0)\cos\frac{6\pi}{T}t\,dt\right)=0;\quad b_3=\frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} F_0\sin\frac{6\pi}{T}t\,dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-F_0)\sin\frac{6\pi}{T}t\,dt\right)=\frac{4F_0}{3\pi}$$

$$a_4=0;\quad b_4=0;\quad a_5=0;\quad b_5=\frac{4F_0}{5\pi}$$

$$F(t)\cong\frac{F_0}{\pi}\left(4\sin\frac{2\pi}{T}t+\frac{4}{3}\sin\frac{6\pi}{T}t+\frac{4}{5}\sin\frac{10\pi}{T}t\right)$$

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j-1}\sin\left((2j-1)\frac{2\pi}{T}t\right)$$





PERIODICKÉ BUZENÍ NEHARMONICKÉ – řešení x(t)

Partikulární řešení pro buzení harmonickou silou s frekvencí ω

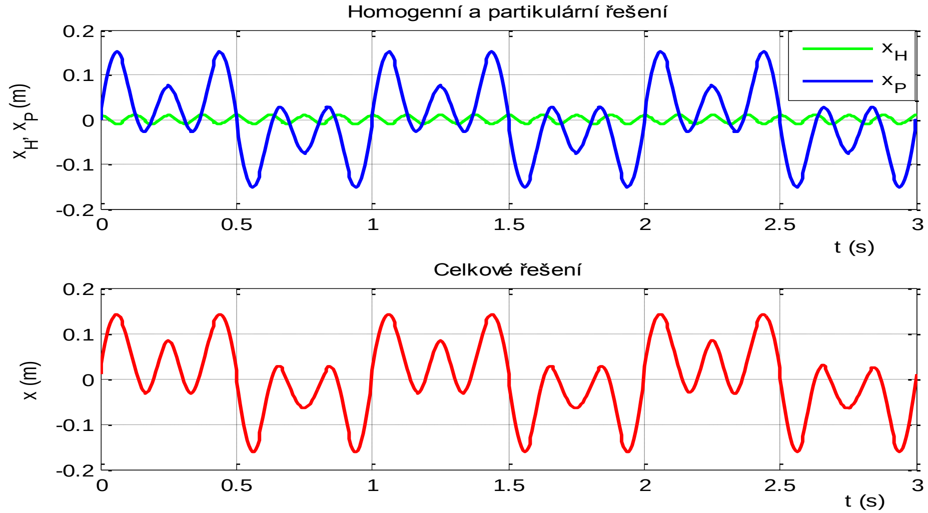
$$x_P = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

Náhrada obdélníkové síly harmonickými funkcemi

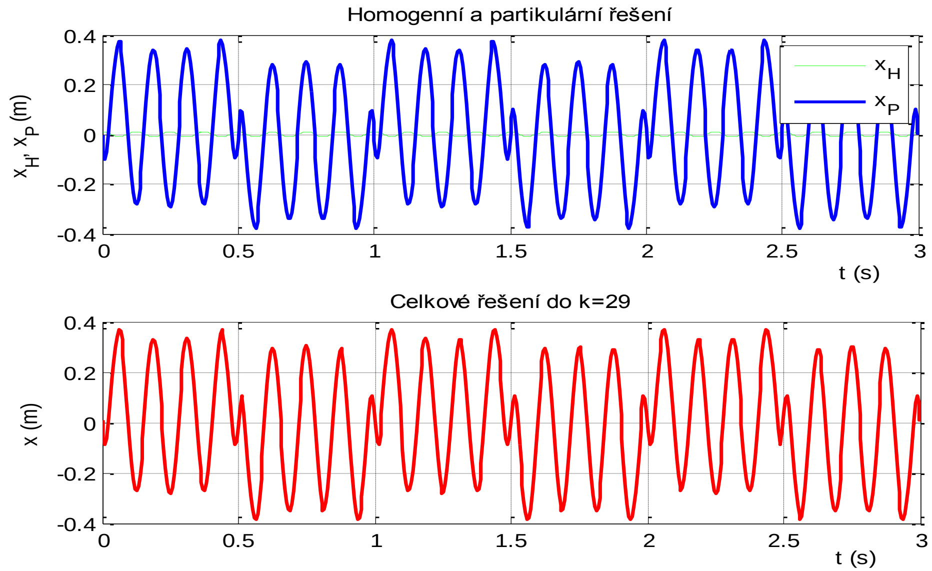
$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \sin\left((2j-1)\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Partikulární řešení s 3 (resp. 5) harmonickými

$$x_P(t) \cong \frac{\frac{4F_0}{\pi}}{k - m\omega^2} \sin \omega t + \frac{\frac{4F_0}{\pi}}{k - m(3\omega)^2} \sin 3\omega t + \frac{\frac{4F_0}{\pi}}{k - m(5\omega)^2} \sin 5\omega t$$



$$x_P(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2j-1)\omega t\right)}{k - m\left((2j-1)\omega\right)^2} = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2j-1)\frac{2\pi}{T} t\right)}{k - m\left((2j-1)\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$



Celkové řešení při buzení obdélníkovou periodickou silou

$$x_P(t) = x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{4F_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2j-1)\frac{2\pi}{T} t\right)}{k - m\left((2j-1)\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$