KMS – cvičení 4

Ondřej Marek

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VYNUCENÉ KMITÁNÍ TLUMENÉHO SYSTÉMU

Pohybová rovnice:

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \hat{F}e^{i\omega t}$

$\hat{F}$ je komplexní amplituda, která má velikost a fázový posun.

Homogenní řešení se již probíralo, u tlumeného systému po čase odezní (díky tlumení)

Partikulární řešení:

odhad

$x = \hat{X}e^{i\omega t}$

$\dot{x} = i\omega\hat{X}e^{i\omega t}$

$\ddot{x} = -\omega^2\hat{X}e^{i\omega t}$

po dosazení do pohybové rovnice:

$-m\omega^2\hat{X}e^{i\omega t} + ib\omega\hat{X}e^{i\omega t} + k\hat{X}e^{i\omega t} = \hat{F}e^{i\omega t}$

$(-m\omega^2 + ib\omega + k)\hat{X} = \hat{F}$

Frekvenční přenos:

$$G(i\omega) = \frac{\hat{X}}{\hat{F}} = \frac{1}{k - m\omega^2 + ib\omega} = \frac{1}{m(\Omega^2 - \omega^2 + i2\zeta\Omega\omega)}$$

$$\Gamma = \frac{\hat{X}}{\hat{X}_{st}} = \frac{\hat{X}}{\frac{\hat{F}}{k}} = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2 + i2\zeta\Omega\omega} = \frac{1}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta}$$

$\Gamma(\eta) = |\Gamma(\eta)| \cdot e^{-i\varphi_F}$

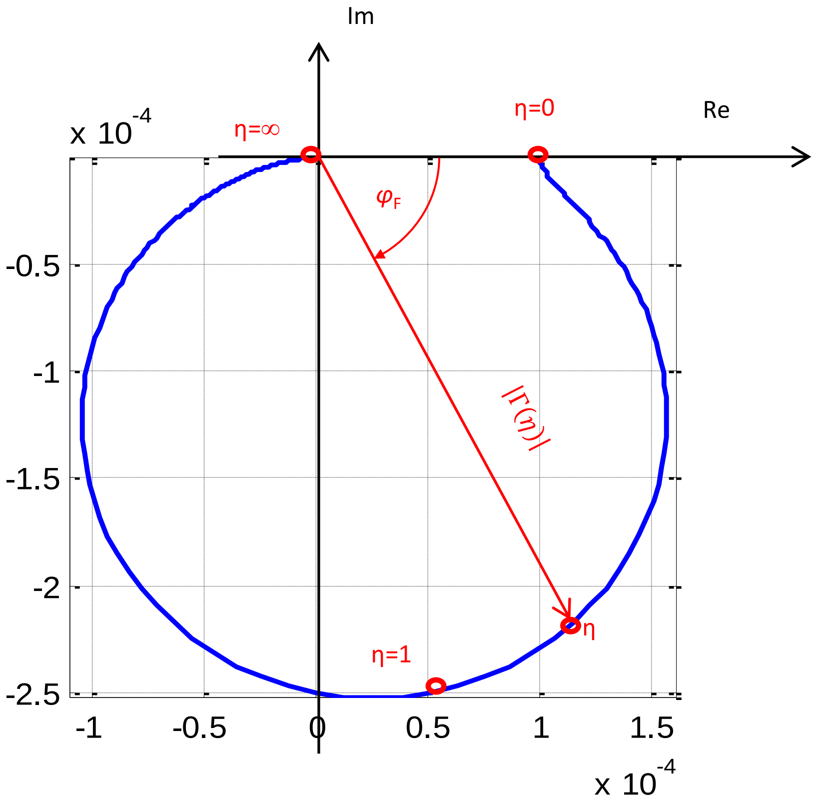
$|\Gamma(\eta)|$ ... amplitudová charakteristika – závislost amplitudy na η

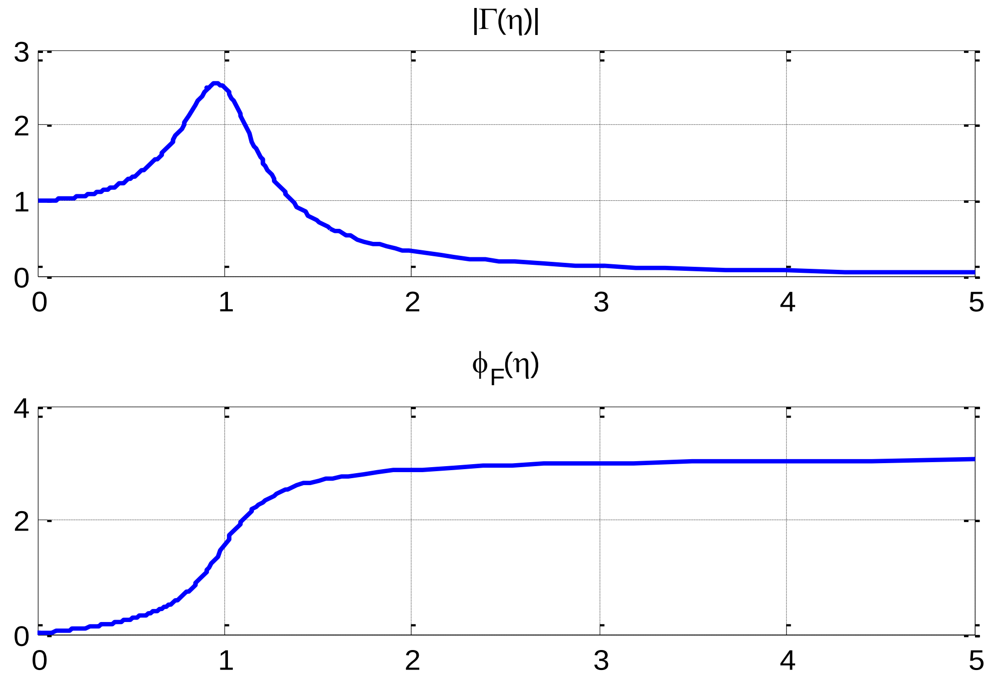
$\varphi_F(\eta)$ ... fázová charakteristika – závislost fázového posunutí na η

$$|\Gamma(\eta)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

$$\varphi_F(\eta) = \arccos\frac{1-\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

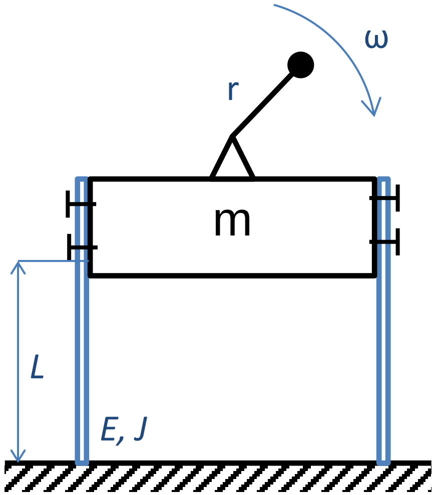
Amplitudo-fázová charakteristika





VYNUCENÉ KMITÁNÍ - příklad

Příklad: Stoleček na 4 listových pružinách budí rotující hmota m_0 na rameni r. Vyjádřete vztah pro amplitudovou a fázovou charakteristiku. Vyjádřete odezvu systému pro budící frekvenci ω=75rad/s.



m = 5 kg
m_0 = 0.5 kg
E = 2.1e[11] Pa
L = 0.2m
r = 0.05m
ζ = 0.1
4 list. pružiny s průřezem: [**axb**]=15 mm x 2 mm

Celková tuhost 4 paralelních pružin:

$$k = 4k_1 = \frac{4 \cdot 12EJ}{L^3}$$

$$k = \frac{4Eab^3}{L^3} = 1.26 \cdot 10^4 \; Nm^{-1}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.26 \cdot 10^4}{5}} = 50.2 \; rad/s$$

Pohybová rovnice

$$\ddot{x} + 2\zeta\Omega\dot{x} + \Omega^2 x = \frac{\hat{F}}{m} e^{-i\omega t}$$

$$\hat{F} = F e^{i\varphi_F} = m_0 r \omega^2 e^{i\varphi_F}$$

$$\hat{X} = X e^{i\varphi_X}$$

VYNUCENÉ KMITÁNÍ - příklad

odhad řešení:

$x = \hat{X}e^{-i\omega t}$

$\dot{x} = -i\omega\hat{X}e^{-i\omega t}$

$\ddot{x} = -\omega^2\hat{X}e^{-i\omega t}$

po dosazení do pohybové rovnice:

$$(\Omega^2 - \omega^2 - i2\zeta\Omega\omega)\hat{X}e^{-i\omega t} = \frac{\hat{F}}{m}e^{-i\omega t}$$

lze vyjádřit poměr komplexních amplitud výchylky a budící síly (přenos):

$$\frac{\hat{X}}{\hat{F}} = \frac{|X|e^{i\varphi_X}}{m_0 r\omega^2 e^{i\varphi_F}} = \frac{\frac{1}{m}}{\Omega^2 - \omega^2 - i2\zeta\Omega\omega}$$

$$|X|e^{i(\varphi_X - \varphi_F)} = \frac{\frac{m_0}{m}r\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2 - i2\zeta\Omega\omega}$$

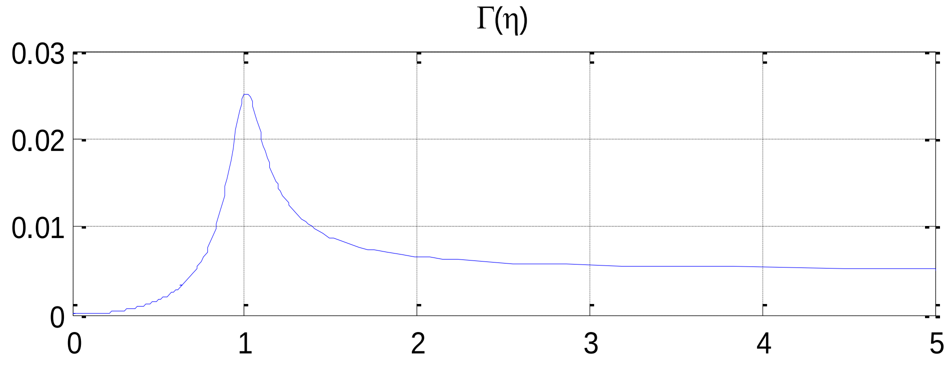
$\varphi = \varphi_X - \varphi_F$ je rozdíl fází síly a výchylky

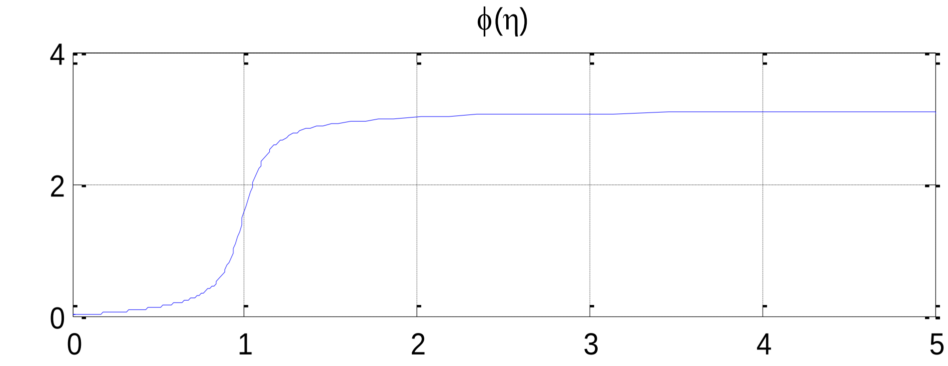
$$\boldsymbol{|X|e^{i\varphi} = \frac{\frac{m_0}{m}r\eta^2}{1 - \eta^2 - i2\zeta\eta}}$$

$$|X|(\eta) = \frac{\frac{m_0}{m}r\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

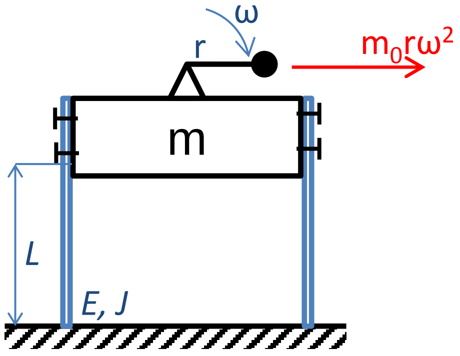
$$\varphi(\eta) = \arccos\frac{1-\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

Amplitudo-fázová charakteristika





VYNUCENÉ KMITÁNÍ – odezva systému pomocí přenosů



Pokud se uvažuje poloha rotující hmoty v počátečním čase t=0 dle obrázku, pak lze pro budící frekvenci ω=75rad/s úlohu řešit následovně.

$$\varphi_F(0) = 0 \Rightarrow \hat{F} = Fe^0$$
$$x_P(t) = \hat{X}e^{-i\omega t}$$

Záporné znaménko u $i\omega t$ značí otáčení po směru hodinových ručiček.

$$\hat{X} = Xe^{i\varphi_x} = |X|e^{i(\varphi+\varphi_F)} = Xe^{i\varphi} = \frac{\frac{m_0}{m} r\eta^2}{1-\eta^2-i2\zeta\eta}$$

naladění:

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{75}{\sqrt{\frac{12600}{5}}} = 1.494$$

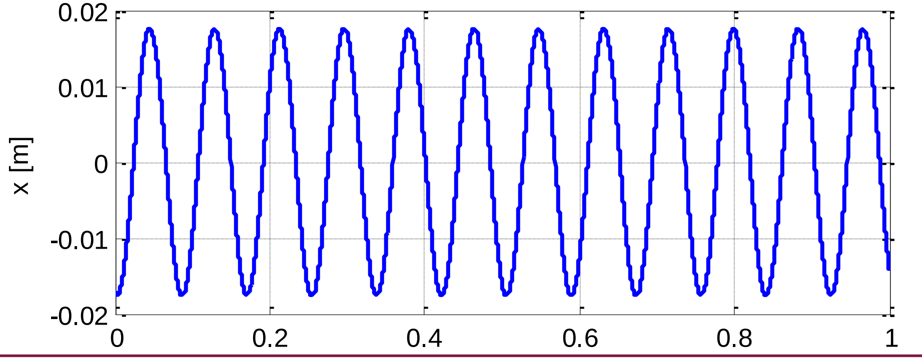
$$X = \frac{\frac{0.5}{5}\cdot 0.1\cdot 1.494^2}{\sqrt{(1-1.494^2)^2+(2\cdot 0.1\cdot 1.494)^2}} = 0.0176\, m$$

$$\varphi = \arccos\frac{1-1.494^2}{\sqrt{(1-1.494^2)^2+(2\cdot 0.1\cdot 1.494)^2}} = 2.9037 \text{ rad}$$

$$x_P(t) = Xe^{i\varphi}e^{-i\omega t} = 0.0176\cdot e^{2.9037i}e^{-i\omega t}$$

Reálná vynucená výchylka hmoty m ve směru x je reálná složka komplexního čísla $x_P(t)$.

$$x_P(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$$
$$\boldsymbol{x_P(t) = 0.0176\cos(75t - 2.9037)}$$

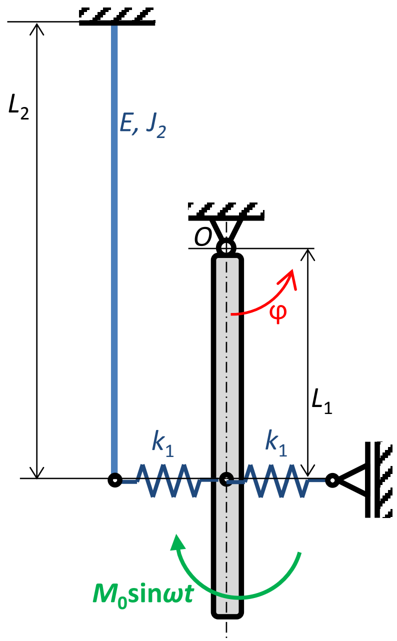


Příklad 2 – vynucené kmitání bez tlumení

Zadání:
Homogenní tyč s konstantním průřezem o hmotnosti *m* s momentem setrvačnosti I_O je rotačně uložena v bodě *O*. Její rovnovážnou polohu zajišťují 3 pružiny (jedna listová a 2 vinuté). Pružiny generují pouze horizontální sílu.

Dáno:

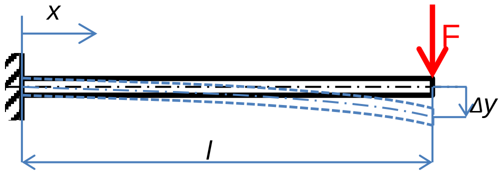
$L_1 = 0{,}1$ m	$L_2 = 0{,}2$ m
$E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa	$J_2 = 8 \cdot 10^{-11}$ m^4
$I_O = 0{,}1$ kgm^2	$m = 13$ kg
$k_1 = 6000$ N/m	
$M_0 = 10$ Nm	
$\omega = 20$ rad/s	

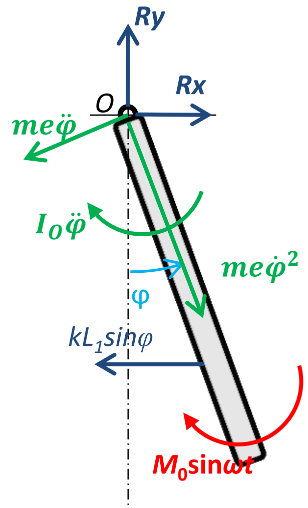


Určete:

- Odvoďte vztah pro tuhost listové pružiny na jedné straně vetknuté (jako je na obrázku).
- Uvolněte těleso a napište pohybovou rovnici tělesa charakterizující jeho rotační pohyb. Uvažujte malé výchylky a rovnici linearizujte. K popisu použijte předepsanou souřadnici φ vyznačenou ve schématu.
- Určete frekvenci vlastních kmitů.
- Odvoďte vztah pro výpočet natočení tyče v čase při buzení frekvencí *ω*. Uvažujte nulové počáteční podmínky, tzn. klidový stav na počátku.

Příklad 2 - řešení





Deformace (průhyb) od síly F:

$$\Delta y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_o^2(x)}{EJ}dx\right) = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_o(x)\frac{\partial M_o}{\partial F}dx$$

$$M_o = F(l-x)$$
$$\frac{\partial M_o}{\partial F} = l - x$$

$$\Delta y = \frac{F}{EJ}\int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

$$F = \frac{3EJ}{l^3}\Delta y = k\Delta y \;\Rightarrow\quad \boldsymbol{k = \frac{3EJ}{l^3}}$$

$$k_2 = \frac{3EJ_2}{L_2^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-11}}{8 \cdot 10^{-3}} = 6000\ Nm^{-1}$$

Celková tuhost – 2 pružiny sériově a k nim jedna paralelně

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_1 = \frac{6000 \cdot 6000}{6000 + 6000} + 6000 = 9000\ Nm^{-1}$$

Pohybová rovnice:

$$I_O\ddot{\varphi} + kL_1 \sin\varphi \cdot L_1 \cos\varphi = -M_0 \sin\omega t$$

Linearizovaná pohybová rovnice:

$$I_O\ddot{\varphi} + kL_1^2\varphi = -M_0 \sin\omega t$$

Příklad 2 - řešení

Pohybová rovnice:

$$\ddot{\varphi} + \frac{kL_1^2}{I_O}\varphi = -\frac{M_0}{I_O}\sin\omega t$$

vlastní frekvence

$$\Omega = \sqrt{\frac{kL_1^2}{I_O}} = \sqrt{\frac{9000 \cdot 0{,}1^2}{0{,}1}} = 30s^{-1}$$

odhad řešení

$\varphi_P = \Phi \sin\omega t$

$\ddot{\varphi}_P = -\omega^2\Phi\sin\omega t$

dosazení do pohybové rovnice:

$$-I_O\omega^2\Phi\sin\omega t + kL_1^2\Phi\sin\omega t = -M_0\sin\omega t$$

$$\Phi = -\frac{M_0}{kL_1^2 - I_O\omega^2} = -\frac{10}{9000 \cdot 0{,}01 - 0{,}1 \cdot 400} = -0{,}2\,rad$$

$\varphi_P(t) = \Phi\sin\omega t$

$\boldsymbol{\varphi_P(t) = -0{,}2\,sin\,20t}$

POZOR! Homogenní řešení nemusí být nulové!

$\varphi_H(t) = \mathrm{A}\cos\Omega t + \mathrm{B}\sin\Omega t$

$\boldsymbol{\varphi(t) = \mathrm{A}\,cos\,\Omega t + \mathrm{B}\,sin\,\Omega t + \Phi\,sin\,\omega t}$

pro nulové p.p. $\varphi(0) = 0$ a $\dot{\varphi}(0) = 0$ platí

$\mathrm{A} = 0$

$\mathrm{B} = -\Phi\dfrac{\omega}{\Omega}$

$$\boldsymbol{\varphi(t) = 0.133\,sin\,30t - 0.2\,sin\,20t}$$