KMS – cvičení 9

Ondřej Marek

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SYSTÉM S n DOF – ŘEŠENÍ V MODÁLNÍCH SOUŘADNICÍCH

Pohybové rovnice lineárního systému:

$\mathbf{M\ddot{x}} + \mathbf{B\dot{x}} + \mathbf{Kx} = \mathbf{f}$

$\mathbf{x} = \mathbf{Uq}$ **U** je modální matice, vlastní vektory $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,..., $\mathbf{u_n}$ jsou sloupce v matici **U**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u_1} \quad \cdots \quad \mathbf{u_n}] \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}e^{i\omega t}$ **x** - vektor fyzikálních souřadnice, **r** – vektor amplitud fyzikálních souřadnic

$\mathbf{q}(t) = \mathbf{c}e^{i\omega t}$ **q** - vektor modálních souřadnic, **c** – vektor amplitud modálních souřadnic

$\mathbf{\dot{x}} = \mathbf{U\dot{q}}$

$\mathbf{\ddot{x}} = \mathbf{U\ddot{q}}$

Dosazení do pohybových rovnic:

$\mathbf{MU\ddot{q}} + \mathbf{BU\dot{q}} + \mathbf{KUq} = \mathbf{f}$

$\mathbf{U^T MU\ddot{q}} + \mathbf{U^T BU\dot{q}} + \mathbf{U^T KUq} = \mathbf{U^T f}$

$\mathbf{I\ddot{q}} + \mathbf{U^T BU\dot{q}} + \mathbf{\Lambda q} = \mathbf{U^T f}$

Matice I a Λ jsou diagonální. Pokud je i $\mathbf{U^T B U}$ také diagonální, pak se ze soustavy rovnic stanou skupina nezávislých rovnic o jedné neznámé

lze také psát: $\mathbf{U^T BU} = 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}$, kde $\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta_n \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Omega_n \end{bmatrix}$

SYSTÉM S n DOF – diagonalizovatelnost U^T^BU

Podmínka diagonální matice $\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{BU}$ je v našem případě vyžadována z důvodu jednoduššího řešení a rozpadu soustavy rovnic na nezávislé rovnice o jedné proměnné.

Požadavek $\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{BU} = \mathbf{\Delta}$, kde $\mathbf{\Delta}$ značí diagonální matici
platí $\mathbf{\Lambda\Delta} = \mathbf{\Delta\Lambda}$, protože $\mathbf{\Lambda}$ je také diagonální ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{KU}$)
tedy:
$\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{KUU}^\mathrm{T}\mathbf{BU} = \mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{BUU}^\mathrm{T}\mathbf{KU}$
$\mathbf{KUU}^\mathrm{T}\mathbf{B} = \mathbf{BUU}^\mathrm{T}\mathbf{K}$
$\mathbf{UU}^\mathrm{T} = \mathbf{M}^{-1}$

podmínka diagonalizovatelnosti $\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{BU}$: $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BM}^{-1}\mathbf{K}$

Co vyhovuje podmínce $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BM}^{-1}\mathbf{K}$?
nejjednodušší a často používaná: $\mathbf{B} = a_1\mathbf{K}$

Caugheyho podmínka

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\sum_{i=0}^{n<\infty} a_i(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^i$$

n=0: $\mathbf{B} = a_0\mathbf{M}$
n=1: $\mathbf{B} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$ Rayleigho tlumení (proporcionální)
n=2: $\mathbf{B} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} + a_2\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}$

SYSTÉM S n DOF – ŘEŠENÍ V MODÁLNÍCH SOUŘADNICÍCH

Pohybové rovnice lineárního systému ve fyzikálních souřadnicích:

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$

Pohybové rovnice lineárního systému v modálních souřadnicích:

$\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{U}^T\mathbf{f}$

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \vdots\\ \ddot{q}_n\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}\zeta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \zeta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Omega_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Omega_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Omega_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \mathbf{u}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_\mathrm{n}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_n\end{bmatrix}$$

n nezávislých rovnic pro n nezávislých systémů

řeší se každý modální tvar zvlášť (každý má svoji Ω)

Z matic **M**, **B**, **K** se získají ekvivalentní matice pro modální popis **Ω**, **U**, **ζ**.

pro řešení v modálních souřadnicích je třeba převést i počáteční podmínky

$\mathbf{x_0} = \mathbf{U}\mathbf{q_0}$

buď $\mathbf{q_0} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x_0}$

nebo $\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x_0} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{q_0}$

$\mathbf{q_0} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x_0}$

$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{0} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$

Řešení:

$$q_{jH} = D_j \sin\left(\Omega_j t\sqrt{1-\zeta_j^2} + \varphi_{0j}\right)e^{-\zeta_j\Omega_j t}$$

$$q_{jH} = \hat{d}_j e^{i\Omega_j t\sqrt{1-\zeta_j^2}} e^{-\zeta_j\Omega_j t} = \hat{d}_j e^{\left(i\sqrt{1-\zeta_j^2}-\zeta_j\right)\Omega_j t}$$

pokud $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{f}_{0k}\mathrm{e}^{i\omega_k t}$

$$q_{jP} = \sum_k \hat{C}_{jk} e^{i\omega_k t}$$

SYSTÉM S n DOF – redukce modelu

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{q}$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U_A} \quad \mathbf{U_B}] \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_A} \\ \mathbf{q_B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U_A}\mathbf{q_A} + \mathbf{U_B}\mathbf{q_B}$$

Pokud se vyhodnotí, že lze vlastní tvary $\mathbf{U_B}$ zapomenout (rozměr $\mathbf{U_B}$ je n x k, rozměr $\mathbf{q_B}$ k x 1), pak lze systém s n DOF redukovat na n-k DOF.

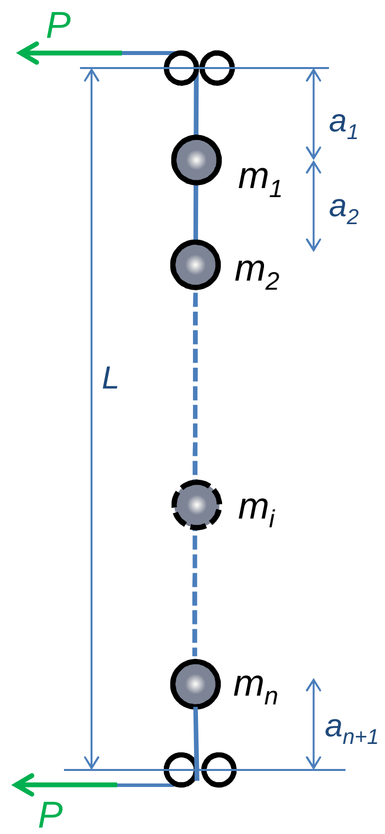
Po redukci:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U_A}\mathbf{q_A}$$

Modální souřadnice – příklad

Příklad: Předepnutá hmotná struna s hmotností m_s délky L se chová jako poddajná soustava. Diskretizujte kontinuum dle obrázku na soustavu s r stupni volnosti a určete vlastní frekvence systému a vlastní tvary.

L=1m; r=5; m_s=0.2kg; P=100N



Maticový zápis

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} = \frac{m_S}{r} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{r\times r}}$$

$$a = \frac{L}{r+1}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2P}{a} & -\frac{P}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{P}{a} & \frac{2P}{a} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{P}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{P}{a} & \frac{2P}{a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = 0.04 \cdot \mathbf{I}_{5\times 5}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1200 & -600 & 0 & 0 & 0 \\ -600 & 1200 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 1200 & -600 & 0 \\ 0 & 0 & -600 & 1200 & -600 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 1200 \end{bmatrix}$$

Modální souřadnice – příklad

Maticový zápis
$$\mathbf{M\ddot{x}} + \mathbf{Kx} = \mathbf{0}$$

Získání matic U a Λ v Matlabu příkazem:
`[U,Lambda]=eig(K,M)`

```
U =
   -1.4434   -2.5000    2.8868   -2.5000    1.4434
   -2.5000   -2.5000   -0.0000    2.5000   -2.5000
   -2.8868    0.0000   -2.8868   -0.0000    2.8868
   -2.5000    2.5000    0.0000   -2.5000   -2.5000
   -1.4434    2.5000    2.8868    2.5000    1.4434

Lambda =
   1.0e+04 *
    0.4019         0         0         0         0
         0    1.5000         0         0         0
         0         0    3.0000         0         0
         0         0         0    4.5000         0
         0         0         0         0    5.5981
```

Vlastní frekvence (s jednotkou Hz) lze spočíst z diagonálních prvků matice Lambda

```
frequencies= sqrt(diag(Lambda))/(2*pi)

frequencies =
   10.0900
   19.4924
   27.5664
   33.7619
   37.6565
```

Diagonalita matice $\mathbf{U}^T\mathbf{BU}$ se řešit nemusí, jelikož **B** je nulová matice.

Maticový zápis v modálním tvaru
$$\mathbf{\ddot{q}} + \mathbf{\Lambda q} = \mathbf{0}$$

Je třeba přepočíst počáteční podmínky z fyzikálních souřadnic do modálních

x_0= [0.02 0.04 0.06 0.04 0.02]^T
v_0= [0 0 0 0 0]^T

$$\mathbf{q_0} = \mathbf{U}^T\mathbf{Mx_0}$$
$$\mathbf{\dot{q}_0} = \mathbf{U}^T\mathbf{Mv_0}$$

$\mathbf{q_0}$ = [-0.0172 -0.0000 -0.0023 -0.0000   0.0012]^T
$\mathbf{\dot{q}_0}$ = [0   0   0   0   0]^T

rovnice lze řešit po jedné od první vlastní frekvence po n-tou

$$q_{1H}(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t$$
$$q_{1H}(0) = A_1 = q_{01} = -0.0172$$
$$\dot{q}_{1H}(0) = B_1\Omega_1$$
$$B_1 = \frac{\dot{q}_{01}}{\Omega_1} = 0$$
$$q_{1H}(t) = -0.0172 \cos 63.40t$$

Modální souřadnice – příklad

2. vlastní tvar

$$q_{2H}(t) = A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t$$
$$q_{2H}(0) = A_2 = q_{02} = 0$$
$$\dot{q}_{2H}(0) = B_2 \Omega_2$$
$$B_2 = \frac{\dot{q}_{02}}{\Omega_2} = 0$$
$$q_{2H}(t) = 0$$

3. vlastní tvar

$$q_{3H}(t) = A_3 \cos \Omega_3 t + B_3 \sin \Omega_3 t$$
$$q_{3H}(0) = A_3 = q_{03} = -0.0023$$
$$\dot{q}_{3H}(0) = B_3 \Omega_3$$
$$B_3 = \frac{\dot{q}_{03}}{\Omega_3} = 0$$
$$q_{3H}(t) = -0.0023 \cos 173.2t$$

a podobně:

$$q_{4H}(t) = 0$$
$$q_{5H}(t) = 0.0012 \cos 236.6t$$

Přechod zpět do fyzikálních souřadnic

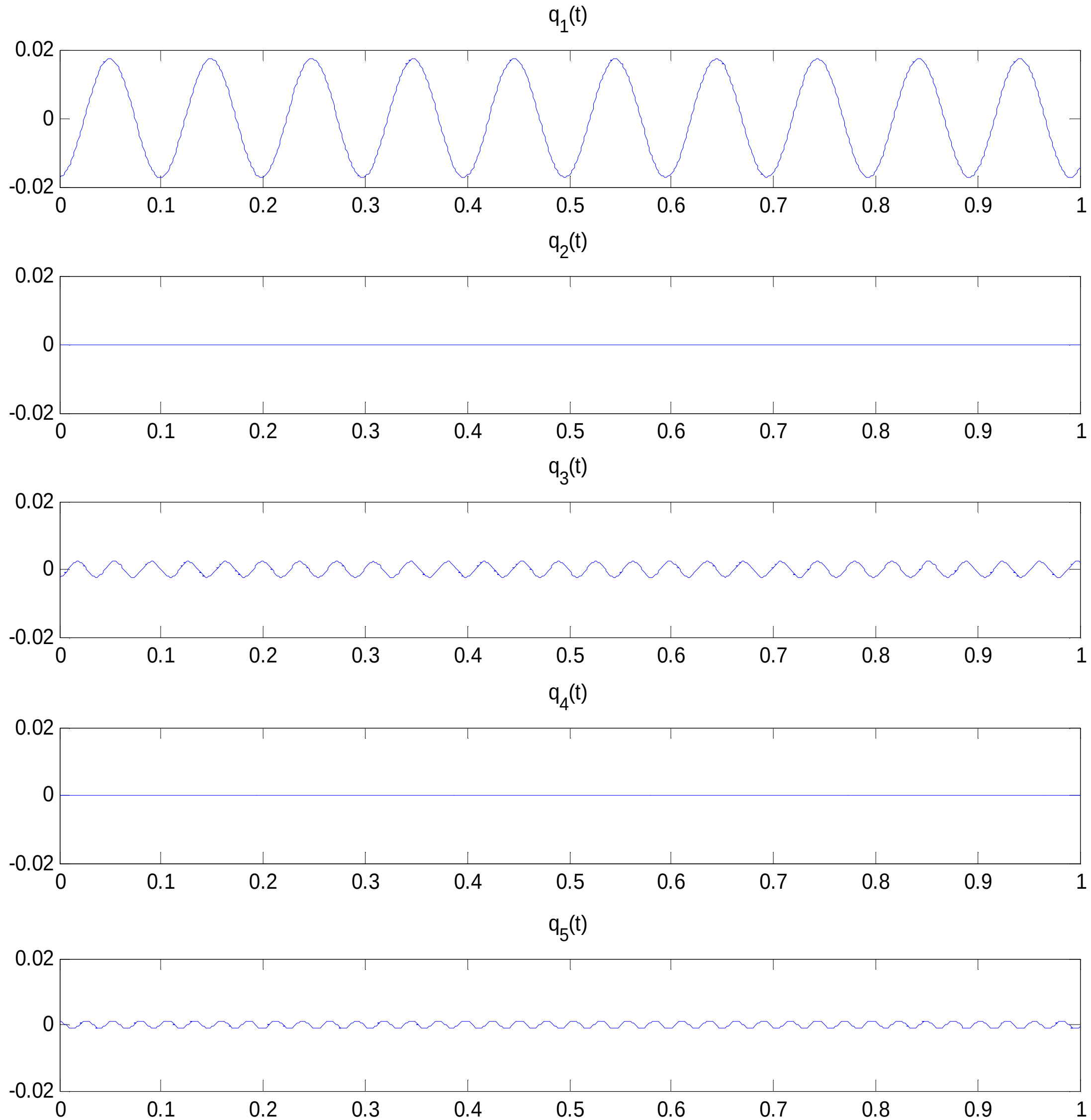
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{q}(t)$$
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_5(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{u_1} \quad \dots \quad \mathbf{u_5}] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_5(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = -1.4434 q_1(t) + 2.8868 q_3(t) + 1.4434 q_5(t)$$
$$x_1(t) = -1.4434 \cdot (-0.0172) \cos 63.40t + 2.8868 \cdot (-0.0023) \cos 173.2t + 1.4434 \cdot 0.0012 \cos 236.6t$$

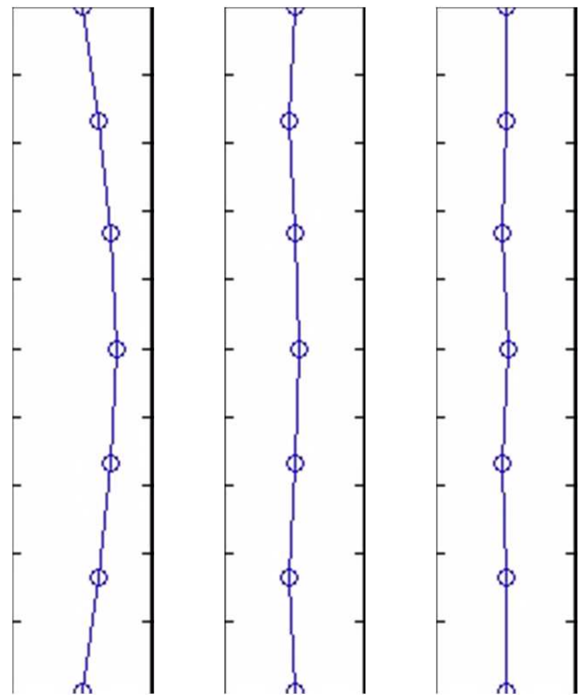
$$x_1(t) = 0.0249 \cos 63.40t - 0.0067 \cos 173.2t + 0.0018 \cos 236.6t$$
$$x_2(t) = 0.0431 \cos 63.40t - 0.0031 \cos 236.6t$$
$$x_3(t) = 0.0498 \cos 63.40t + 0.0067 \cos 173.2t + 0.0036 \cos 236.6t$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

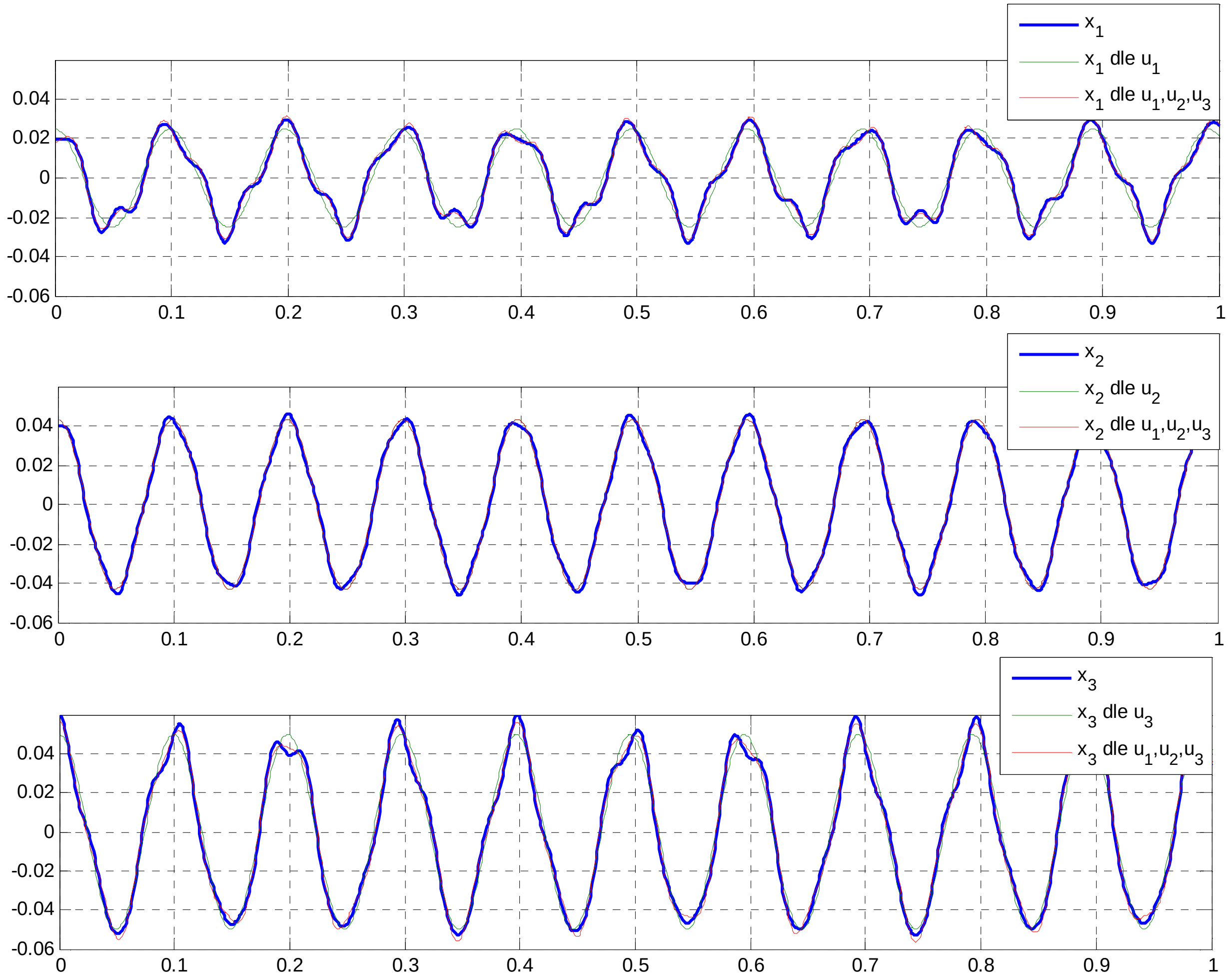
Průběh modálních souřadnic v čase

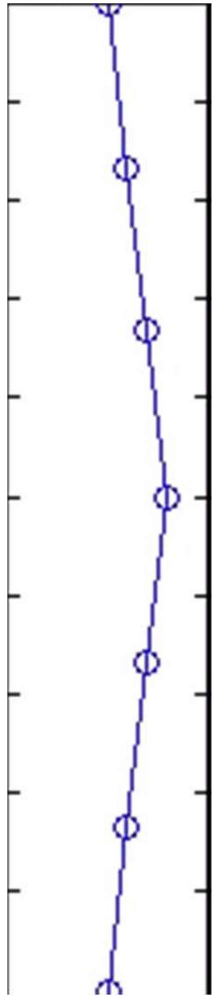


x(t) dle u_1 x(t) dle u_3 x(t) dle u_5



Příklad (struna) - grafy





Modální souřadnice – příklad – přidáno tlumení

Uvažujme proporcionální tlumení. Použijeme tedy pohybovou rovnici v následujícím tvaru a zvolíme matici $\boldsymbol{\zeta}$

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{U}^T\mathbf{f}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{diag}([0.01 \quad 0.02 \quad 0.04 \quad 0.05 \quad 0.08])$$

Pro ilustraci lze zpětně vypočíst matici B, není však třeba ji znát

$$2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-\mathrm{T}}2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$$

```
B=M'*U*2*Zeta*Omega*U'*M
B = 0.5763   -0.3744    0.0761   -0.0481    0.0540
   -0.3744    0.6524   -0.4225    0.1301   -0.0481
    0.0761   -0.4225    0.7064   -0.4225    0.0761
   -0.0481    0.1301   -0.4225    0.6524   -0.3744
    0.0540   -0.0481    0.0761   -0.3744    0.5763
```

Homogenní řešení j-tého tvaru má obecně tvar:

$$q_{jH} = D_j \sin\left(\Omega_j t\sqrt{1-\zeta_j^2} + \varphi_{0j}\right)e^{-\zeta_j\Omega_j t}$$

Ten lze přepsat také jako:

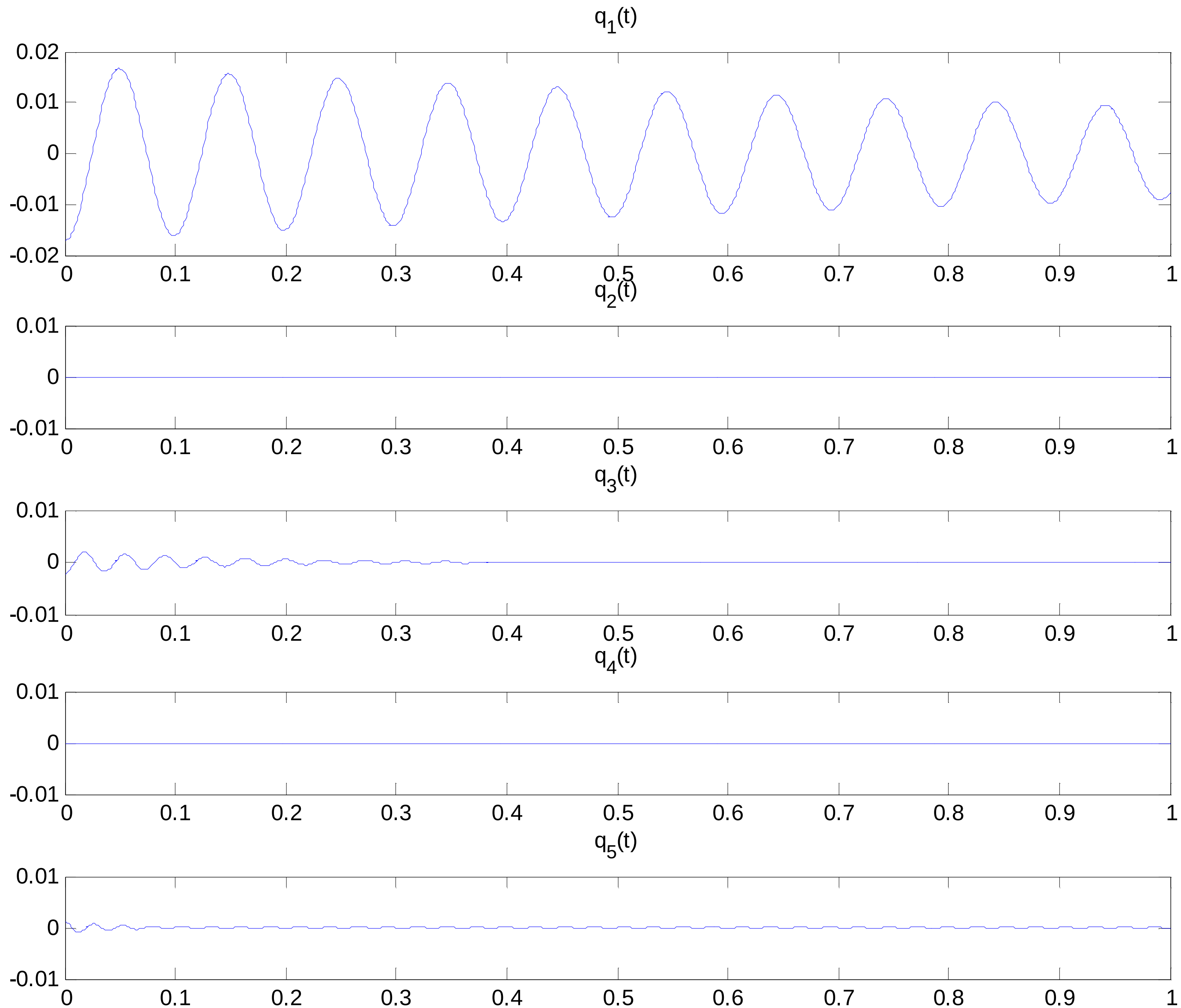
$$q_{jH} = e^{-\zeta_j\Omega_j t}\left(C_j\cos\left(\Omega_j t\sqrt{1-\zeta_j^2}\right) + S_j\sin\left(\Omega_j t\sqrt{1-\zeta_j^2}\right)\right)$$

Z důvodu, že počáteční podmínky jsou zadány v čase t=0 (zpravidla bývá), sin0=0 a e^0=1.

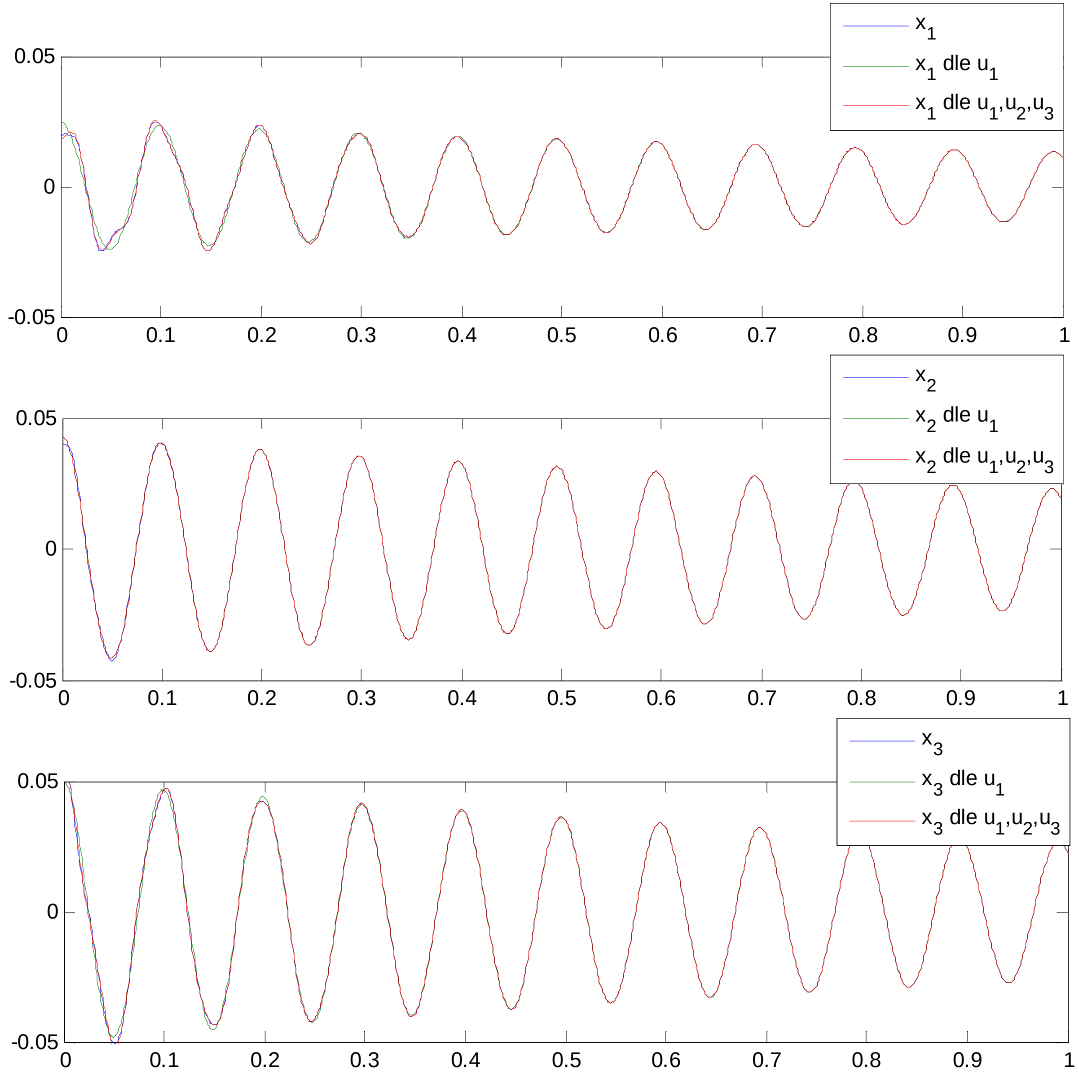
$$q_{1H}(t) = e^{-\zeta_1\Omega_1 t}\left(C_1\cos\left(\Omega_1 t\sqrt{1-\zeta_1^2}\right) + S_1\sin\left(\Omega_1 t\sqrt{1-\zeta_1^2}\right)\right)$$
$$q_{1H}(0) = C_1 = q_{01} = -0.0172$$
$$\dot{q}_{1H}(0) = B_1\Omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2}$$
$$B_1 = \frac{\dot{q}_{01}}{\Omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2}} = 0$$
$$q_{1H}(t) = -0.0172e^{-0.634t}\cos 63.39t$$

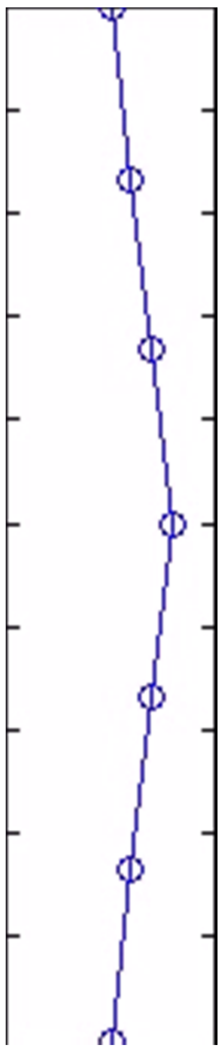
$$q_{2H}(t) = 0$$
$$q_{3H}(t) = -0.0023e^{-6.93t}\cos 173.1t$$
$$q_{4H}(t) = 0$$
$$q_{5H}(t) = 0.0012e^{-18.9t}\cos 235.8t$$

Průběh modálních souřadnic v čase – tlumený systém



Rozvoj pomocí vlastních tvarů





Numerické řešení soustavy lin. diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{U}^T\mathbf{f}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \ddot{\mathbf{q}}\end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \ddot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I}\\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\Omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{O}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{U}^T\mathbf{f}$$

I ... jednotková matice rozměru *nxn*

O ... nulová matice rozměru *nxn*

Pokud je znám vektor **Q**(t), což jsou většinou počáteční podmínky **Q**(0), pak lze dle rovnice $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{f}$ spočítat $\dot{\mathbf{Q}}(t)$. numerickou integrací se získá vektor **Q**($t + \Delta t$) a výpočet může pokračovat stále dokola.

$$\mathbf{Q}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{Q}}(t) \xrightarrow{\int \dot{\mathbf{Q}}(t)dt} \mathbf{Q}(t+\Delta t) \rightarrow \dot{\mathbf{Q}}(t+\Delta t) \rightarrow \cdots$$

```
function Xt = CV09_st_popis(t,X,f,U, Omega, Zeta)

  n=size(Omega,2);
  Xt = [zeros(n,n) eye(n); -Omega^2     -2*Zeta*Omega]*X + [zeros(n,n); eye(n)]*U'*f ;
end


Q0 = [q0; q0t]; % pocatecni podminky zapsany do matice


T=1; %
f=[0;0;0;0;0];
u=U(:,1);
zeta=0.1

options=odeset('reltol',1e-8,'abstol',1e-8);
[t,Q1] = ode45((@(t,y) CV09_st_popis(t,y, f, U, Omega,Zeta)), [0,T],Q0,options);
```