Vibration of two degree of freedom system

1 Differential equations of motion
2 Natural frequencies
3 Mode shapes
4 Free vibration
5 Forced vibration of undamped system
6 Initial conditions

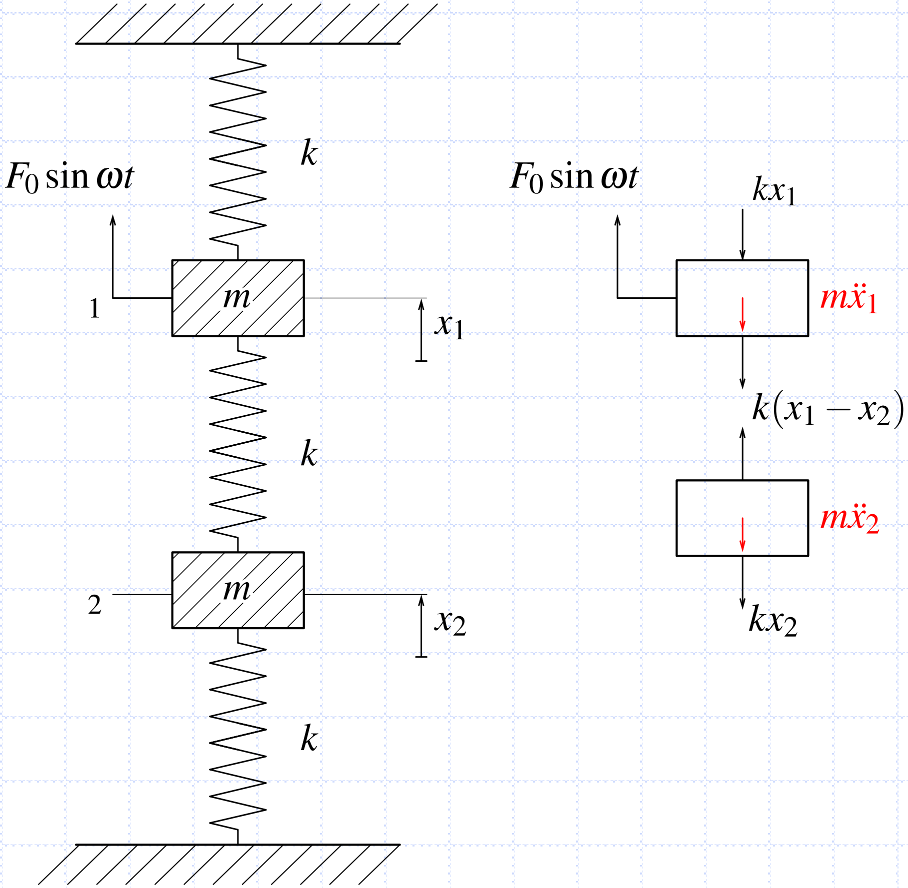
TKMOST

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Systems of two degree of freedom

- The two masses translate in the horizontal direction
- Given:
  - two masses m
  - 3 linear springs with stiffness coefficient k

- Using free body diagram for each mass the equations of motion are set up



Coupled the second-order differential equations

- Differential equation of the 2nd order

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + k\left(x_1 - x_2\right) = F_0 \sin \omega t$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 - k\left(x_1 - x_2\right) = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \sin \omega t$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

- Solution of natural frequencies of the systems - homogenous systems (F_0=0)

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \qquad (1)$$

- Assumed solutions in the form

$$x_1 = a_1 \sin \Omega t$$

$$x_2 = a_2 \sin \Omega t$$

- Differentiating previous eqs twice with respect to time:

$$\ddot{x}_1 = -a_1 \Omega^2 \sin \Omega t = -\Omega^2 x_1$$

$$\ddot{x}_2 = -a_2 \Omega^2 \sin \Omega t = -\Omega^2 x_2$$

- Substituting into equations (1):

$$-m\Omega^2 x_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$-m\Omega^2 x_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

vlastní frekvence

Natural frequencies

System of the linear algebraic equations - homogenous

$$\left(2k - m\Omega^2\right) x_1 - k x_2 = 0$$

$$-k x_1 + \left(2k - m\Omega^2\right) x_2 = 0$$

System of equations has nontrivial solutions if and only if the determinant of the coefficients of a_1 and a_2 is equal to zero:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

which yields

$$\left(2k - m\Omega^2\right)^2 - k^2 = 0$$

$$4k^2 - 4km\Omega^2 + m^2\Omega^4 - k^2 = 0$$

- Quadratic equation in Ω^2

$$\Omega^4 - 4\frac{k}{m}\Omega^2 + 3\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

- Signed

$$\frac{k}{m} = \Omega_0^2$$

- Biquadratic equation

$$\Omega^4 - 4\Omega_0^2\Omega^2 + 3\Omega_0^4 = 0$$

- Roots of equation

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{4\Omega_0^2 \pm \sqrt{16\Omega_0^4 - 12\Omega_0^4}}{2}$$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Natural frequencies

There are two solutions, one associated with the first natural frequency and the second associated with the second natural frequency

$$\Omega_{1,2}^2 = 2\Omega_0^2 \pm \Omega_0^2$$

$$\Omega_1^2 = \Omega_0^2$$

$$\Omega_2^2 = 3\Omega_0^2$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{3}\Omega_0 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mode shapes (principal modes of vibration)

- Two equations provide the same ratio between x_1 and x_2

$$\left(2k - m\Omega^2\right)x_1 - kx_2 = 0 \quad (2a)$$

$$-kx_1 + \left(2k - m\Omega^2\right)x_2 = 0$$

- That is from (2a)

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{1,2} = \frac{2k - m\Omega_{1,2}^2}{k} = 2 - \frac{\Omega_{1,2}^2}{\Omega_0^2}$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 = 2 - 1 = 1 \qquad (3)$$

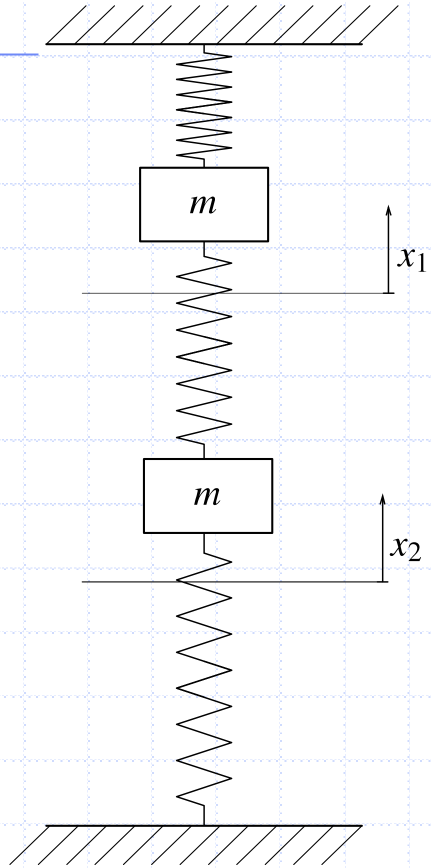
$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 = 2 - 3 = -1 \quad (4)$$

- Ratios (3) and (4) are called mode shapes or principal modes of vibraton

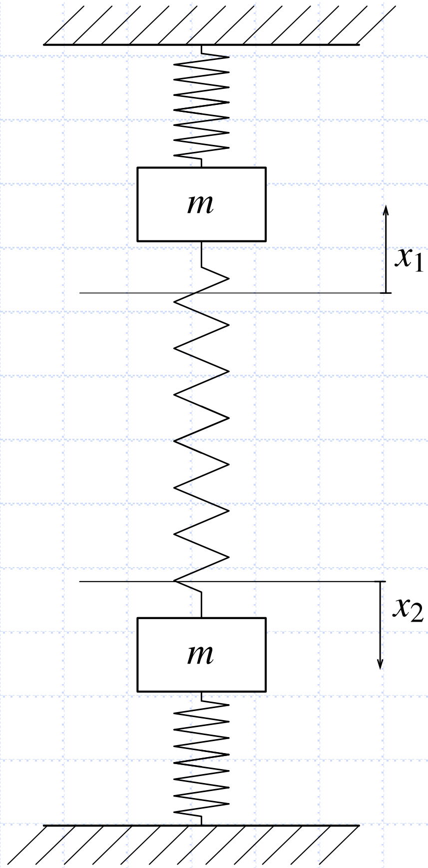
$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 = 1$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 = -1$$

Mode shapes



1st mode shape



2nd mode shape

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Free vibration

- The complete solution can be obtained by summing the two solutions

$$x_1(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \quad (5)$$

$$x_2(t) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 \left(A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 \left(A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t\right) \quad (6)$$

- In eqs (5), (6), there are four constants A_1, B_1, A_2, B_2 which can be determined using the initial conditions

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_{10} = v_{10} \\ x_2(0) &= x_{20} \\ \dot{x}_2(0) &= \dot{x}_{20} = v_{20} \end{aligned}\right\} \text{at least one of the conditions must be nonzero}$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Steady-state Response
Amplitudes of Steady-state Oscillation

- Differential equations

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \sin \omega t$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

- Assuming solutions

$$x_1 = a_1 \sin \omega t$$
$$x_2 = a_2 \sin \omega t$$

- Differentiating previous eqs twice with respect to time

$$\ddot{x}_1 = -a_1\omega^2 \sin \omega t$$
$$\ddot{x}_2 = -a_2\omega^2 \sin \omega t$$

- Substituing into dif. eq.

$$-ma_1\omega^2 \sin \omega t + 2ka_1 \sin \omega t - ka_2 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$
$$-ka_1 \sin \omega t - ma_2\omega^2 \sin \omega t + 2ka_2 \sin \omega t = 0$$

- After cancelling sin ωt

$$-ma_1\omega^2 + 2ka_1 - ka_2 = F_0$$
$$-ka_1 - ma_2\omega^2 + 2ka_2 = 0$$

$$\left(2k - m\omega^2\right)a_1 - ka_2 = F_0$$
$$-ka_1 + \left(2k - m\omega^2\right)a_2 = 0$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Steady-state Response
Amplitudes of Steady-state Oscillation

- Using Cramer´s rule, amplitudes a_1, a_2

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{F_0\left(2k - m\Omega^2\right)}{\left(2k - m\Omega^2\right)^2 - k^2}$$

$$a_1 = a_{ST}\frac{2-\eta^2}{\left(2-\eta^2\right)^2 - 1}$$

- where

$$a_{ST} = \frac{F_0}{k}, \eta^2 = \frac{\omega^2}{k/m}$$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Steady-state Response
Amplitudes of Steady-state Oscillation

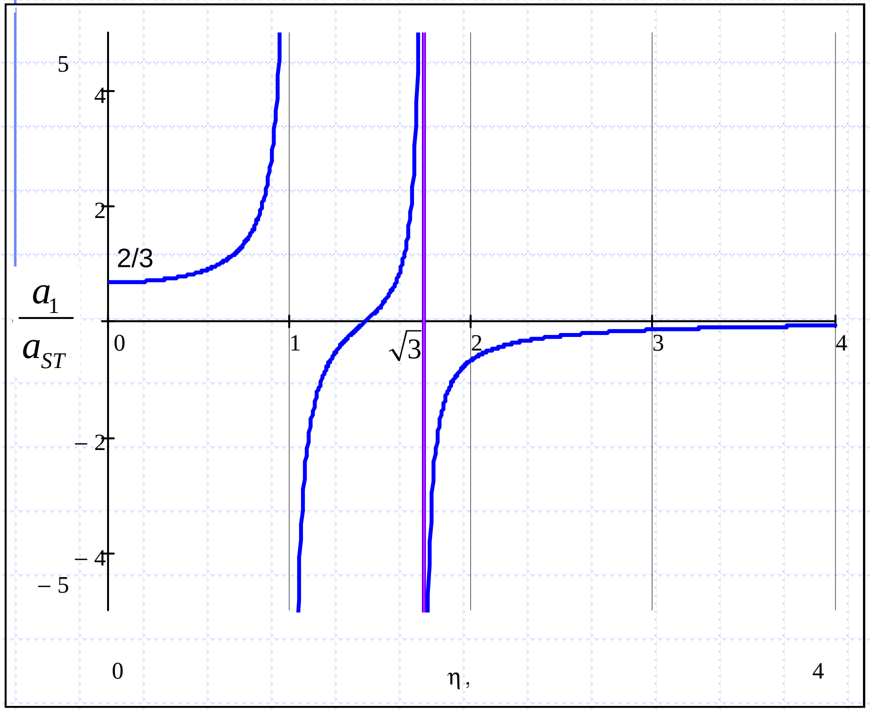
$$a_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{kF_0}{\left(2k - m\,\Omega^2\right)^2 - k^2}$$

$$a_2 = a_{ST} \frac{1}{\left(2 - \eta^2\right)^2 - 1}$$

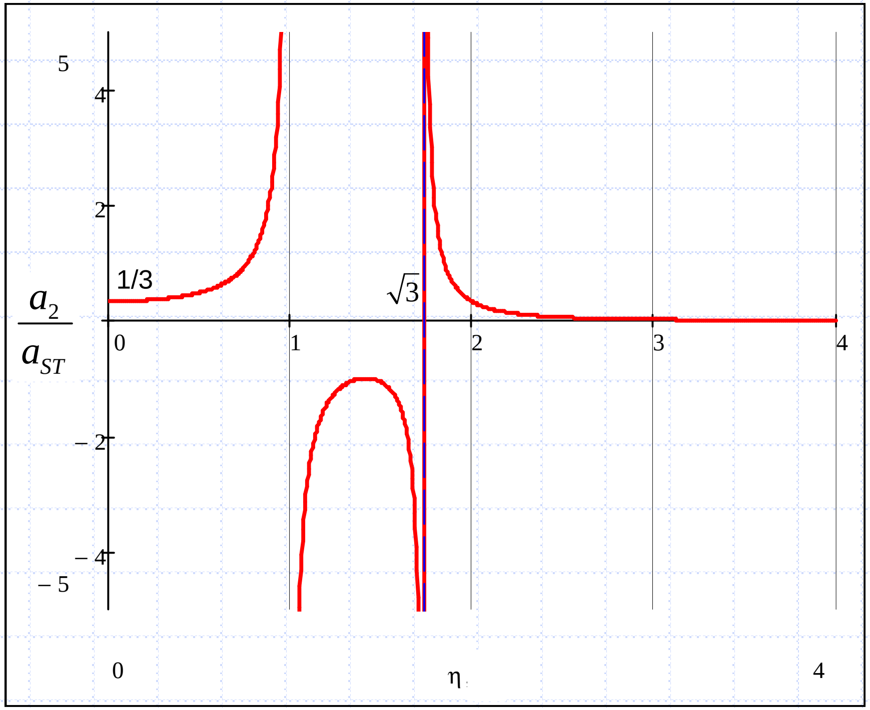
esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Amplitudes Curves

- Amplitude curve of mass 1



- Amplitude curve of mass 2



Initial Conditions A_1, B_1, A_2, B_2

- Initial conditions are given by the initial displacements and velocities of masses 1 and 2

$$x_1(0) = x_{10}$$
$$\dot{x}_1(0) = 0$$
$$x_2(0) = 0$$
$$\dot{x}_2(0) = 0$$

- Substituting initial conditotins into equations

$$x_1(t) = A_1 \cos\Omega_1 t + B_1 \sin\Omega_1 t + A_2 \cos\Omega_2 t + B_2 \sin\Omega_2 t$$

$$x_2(t) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 \left(A_1 \cos\Omega_1 t + B_1 \sin\Omega_1 t\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 \left(A_2 \cos\Omega_2 t + B_2 \sin\Omega_2 t\right)$$

$$\dot{x}_1(t) = \Omega_1\left(-A_1 \sin\Omega_1 t + B_1 \cos\Omega_1 t\right) + \Omega_2\left(-A_2 \sin\Omega_2 t + B_2 \cos\Omega_2 t\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 \Omega_1\left(-A_1 \sin\Omega_1 t + B_1 \cos\Omega_1 t\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 \Omega_2\left(-A_2 \sin\Omega_2 t + B_2 \cos\Omega_2 t\right)$$

Initial Conditions A_1, B_1, A_2, B_2

- Substituting

$$x_{10} = A_1 + A_2$$

$$0 = A_1 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 + A_2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2$$

$$0 = \Omega_1 B_1 + \Omega_2 B_2$$

$$0 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 \Omega_1 B_1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 \Omega_2 B_2$$

- Initial conditions

$$B_1 = B_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{x_{10}}{2}$$

$$A_2 = -\frac{x_{10}}{2}$$

- Free vibrations

$$x_1(t) = \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_1 t - \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_2 t$$

$$x_2(t) = \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_1 t + \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_2 t$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Courses of steady state response $x_1(t)$, $x_2(t)$