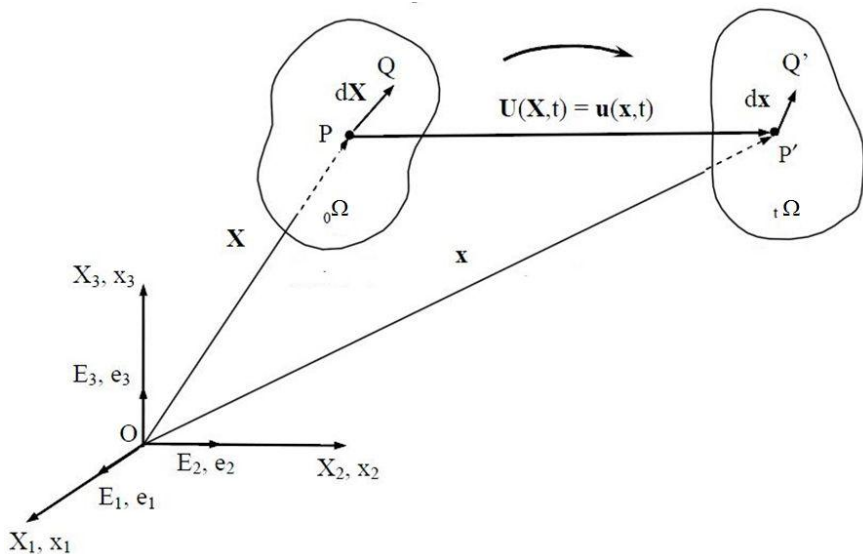


Polární rozklad deformačního gradientu a tenzory přetvoření

- https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory

Deformační gradient



$P(X_1, X_2, X_3)$ = materiálový bod v nedeformované (referenční, materiálové) konfiguraci ${}_0\Omega$

$P'(x_1, x_2, x_3)$ = materiálový bod v deformované (prostorové) konfiguraci ${}_t\Omega$

$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ je posuv bodu P

Deformace bude zcela popsána, jestliže budeme ke každému bodu P znát jeho polohu po deformaci P'

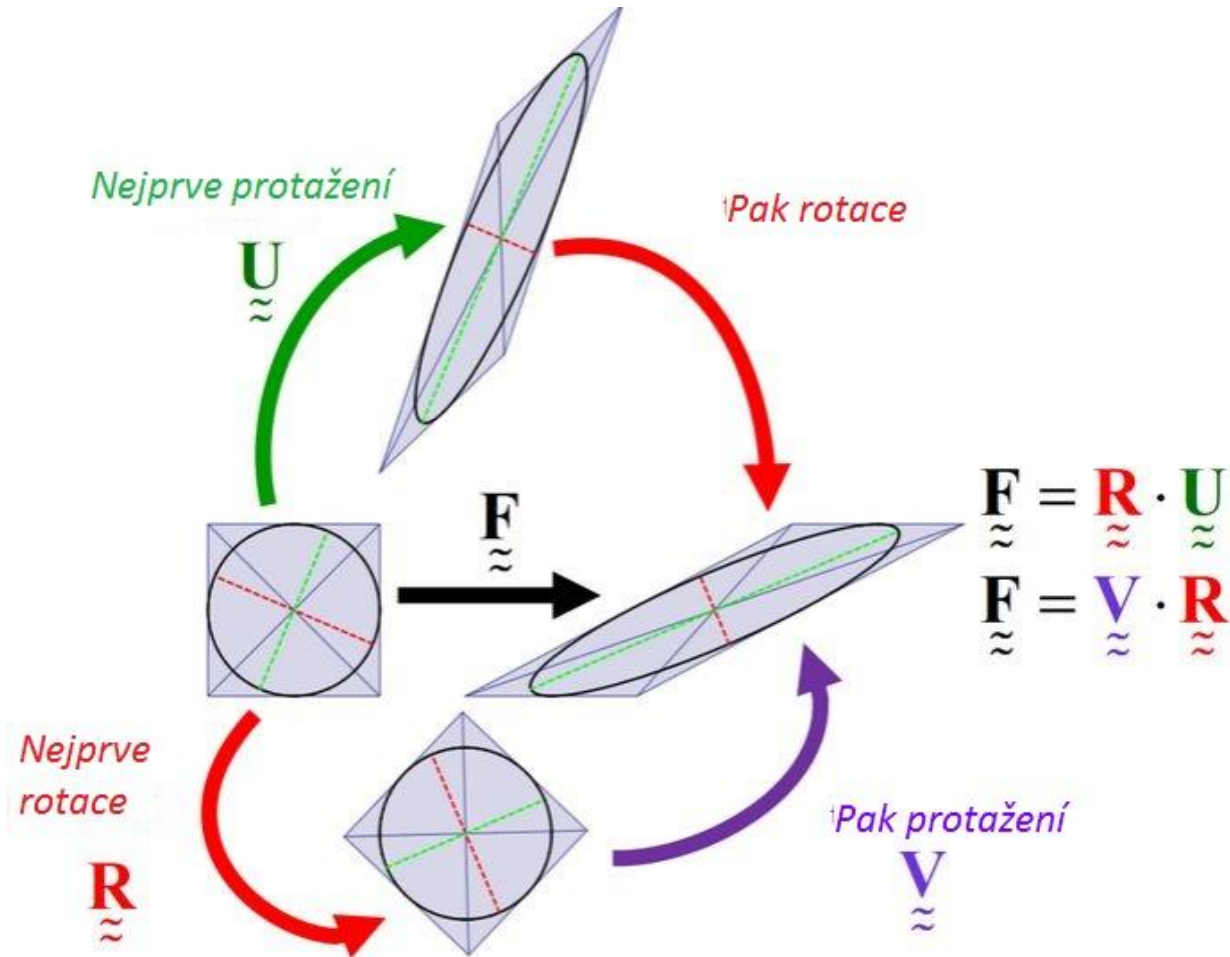
Musí tedy existovat jednoznačné zobrazení χ mezi souřadnicemi nedeformované a deformované konfigurace :

$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ a inverzní vztah $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$.

Deformační gradient: $F = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$, $F^{-1} = \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$, $F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$, $d\mathbf{x} = F d\mathbf{X}$.

Multiplikativní rozklad deformačního gradientu \mathbf{F}

Přetvoření kontinua je rozděleno do dvou fází, jako první se uplatní tenzor, který je v rovnici vpravo.



$$F=RU=VR$$

tenzor rotace R popisuje natáčení kontinua a tenzory protažení U a V popisují deformaci kontinua

- Tenzor rotace R
- Pravostranný symetrický tenzor protažení U
- Levostranný symetrický tenzor protažení V
- Determinant ortonormálního tenzoru rotace $\det(R)=1$
- **Tenzory protažení jsou symetrické a pozitivně definitní**
- Jakobián $J=\det(F)=\det(U)=\det(V)>0$ (vyjadřuje změnu objemu a nezávisí na R)
- Vlastní čísla U a V jsou stejná = hlavní protažení
- Pravý Cauchy-Greenův symetrický tenzor přetvoření $C=F^T F$

$$[F] = [R][U] \Rightarrow [R] = [F][U]^{-1}, \quad [R]^T [R] = [I] \Rightarrow \left[[F][U]^{-1} \right]^T \left[[F][U]^{-1} \right] = [I],$$
$$[U]^{-T} = [U]^{-1} \Rightarrow [U]^{-1} [F]^T [F][U]^{-1} = [I] \Rightarrow [C] = [U]^2 \Rightarrow [U] = \sqrt{[C]}.$$

- Určení vlastních čísel a vlastních vektorů (modální matice) tenzoru přetvoření C
- Odmocnění C a určení vlastních čísel U a V (hlavních protažení)
- Návrat do původního souřadného systému, určení matice rotace R

- **F =deformační gradient**

- 1.0000 0.4950 0.5000
- -0.3330 1.0000 -0.2470
- 0.9590 0 1.5000

- **C=F'*F**

- **C =Pravý Cauchy-Green tenzor přetvoření**

- 2.0306 0.1620 2.0208
- 0.1620 1.2450 0.0005
- 2.0208 0.0005 2.5610

- **[u,c]=eig(C)**

- **u =modální matice C (i U)**(vlastní vektory tenzoru C= hlavní směry)

- 0.7483 -0.0679 0.6599
- -0.1206 -0.9921 0.0347
- -0.6523 0.1056 0.7506

- **c =na diagonále matice jsou vlastní čísla C**

tj. kvadráty hlavních protažení

- 0.2429 0 0
- 0 1.2561 0
- 0 0 4.3376

- **U=sqrt(c)**

- **U =pravostranný tenzor v hlavních protažení λ_i**

- 0.4929 0 0
- 0 1.1207 0
- 0 0 2.0827

- **U=u*U*u'**

Vynásobení modální maticí – návrat do původního souř. syst.

- U =
- 1.1880 0.0787 0.7829
- 0.0787 1.1128 -0.0244
- 0.7829 -0.0244 1.3955

- **R=F*inv(U)**

R = matice rotace

- 2.0288 0.4417 0.2401
- -0.6756 0.8923 -0.1186
- 1.9456 0 0.7202

- **V=F*inv(R)**

- **V =levostranný tenzor protažení**

- 1.0269 0.1090 0.6547
- 0.1090 1.0386 -0.2852
- 0.6547 -0.2852 1.6309

- **[v,V]=eig(V)**

- **v =modální matice V**

- -0.5053 -0.7353 -0.4517
- 0.1779 0.4234 -0.8883
- -0.8444 0.5292 0.0832

- **V =levostranný tenzor v hlavních protaženích λ_i**

- 2.0827 0 0
- 0 0.4929 0
- 0 0 1.1207

Analogicky můžeme vyjít od rozkladu F na rotaci
a levostranný tenzor protažení :

$$[F] = [V][R] \Rightarrow [R] = [V]^{-1}[F], \quad [R][R]^T = [I] \Rightarrow [[V]^{-1}[F]][[V]^{-1}[F]]^T = [I],$$

$$[V]^{-T} = [V]^{-1} \Rightarrow [V]^{-1}[F][F]^T[V]^{-1} = [I] \Rightarrow [b] = [F][F]^T \Rightarrow [V] = \sqrt{[b]}, \text{ kde } [b] = [F][F]^T.$$

Ve vztazích nyní vystupuje levý Cauchy-Greenův tenzor přetvoření $b = FF^T$.

$b = F * F'$

$b =$ levý Cauchy-Green

1.4950	0.0385	1.7090
0.0385	1.1719	-0.6898
1.7090	-0.6898	3.1697

$[v, b] = \text{eig}(b)$

$v =$ modální matice V

-0.7353	0.4517	0.5053
0.4234	0.8883	-0.1779
0.5292	-0.0832	0.8444

$b =$ levý Cauchy-Green v hlavních směrech

0.2429	0	0
0	1.2561	0
0	0	4.3376

$V = \text{sqrt}(b)$

$V =$ levostranný tenzor protažení v hlavních směrech

0.4929	0	0
0	1.1207	0
0	0	2.0827

$V = v * V * v'$

$V =$ levostranný tenzor protažení v původním systému

1.0269	0.1090	0.6547
0.1090	1.0386	-0.2852
0.6547	-0.2852	1.6309

Invarianty symetrických tenzorů druhého řádu – hodnoty, které se zachovávají při transformaci souřadnic

$$I = f(\varepsilon_{ij}) = f(\varepsilon'_{ij}).$$

Př.: Hlavní invarianty tenzoru malých přetvoření ε_{ij} :

Určení vlastních čísel: $\det(\varepsilon - \lambda I) = 0 \Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \text{sym} & & \varepsilon_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk} = \text{stopa tenzoru } \varepsilon_{ij}, \quad I_1 = \text{tr}(\varepsilon_{ij}).$$

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{kvadrat. invariant.}$$

$$I_3 = \det(\varepsilon_{ij}) \quad \text{kubický invariant.}$$

Invarianty pravého Cauchy-Green tenzoru přetvoření

$$C = F^T F = U^2, \quad C_{IJ} = F_{kI} F_{kJ} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J},$$

$$I_1 = \text{tr}(C) = C_{KK} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(C))^2 - \text{tr}(C^2) \right] = \frac{1}{2} \left[(C_{JJ})^2 - C_{IK} C_{KI} \right] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2,$$

$$I_3 = \det(C) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2.$$

Greenův-Lagrangeův tenzor přetvoření

$$d\mathbf{x} = F d\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j = d \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [F] d \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix};$$

Délka úsečky v nedef. konfigur. $dL = \|d\mathbf{X}\| = \sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}$, nebo též

$$(dL)^2 = d\{\mathbf{X}\}^T d\{\mathbf{X}\}.$$

Délka úsečky v def. konfigur. $(dl)^2 = d\{\mathbf{x}\}^T d\{\mathbf{x}\} = d\{\mathbf{X}\}^T [F]^T [F] d\{\mathbf{X}\} \Rightarrow$

$(dl)^2 = d\{\mathbf{X}\}^T [C] d\{\mathbf{X}\}$. $[C] = [F]^T [F]$ symetr. pozit. def. Cauchy-Green

$(dl)^2 - (dL)^2 = d\{\mathbf{X}\}^T ([C] - [I]) d\{\mathbf{X}\} = 2d\{\mathbf{X}\}^T [E] d\{\mathbf{X}\}$, kde

$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) =$ symetrický Greenův-Lagrangeův tenzor přetvoření

Lagrangeovské a Eulerovské tenzory přetvoření

Lagrangeovské:

$$\text{Greenův } E = \frac{1}{2}(F^T F - I) = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(U^2 - I).$$

$$\text{Biotův } B = U - I.$$

$$\text{Henckyho } H = \ln(U).$$

Eulerovské:

$$\text{Almansiův } e = \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) = \frac{1}{2}(I - V^{-2}).$$

Tenzor malého přetvoření $\varepsilon = \frac{1}{2}(RU - UR^T) - I$, není invariantní vzhledem k rotaci.

Determinant deformačního gradientu F

Mějme tři délkové elementy v nedeformované konfiguraci, které neleží v jedné rovině:

$dX^{(1)}, dX^{(2)}, dX^{(3)}$, odpovídající délkové elementy v deformované konfiguraci budou:

$dx^{(i)} = FdX^{(i)}$, pak objemy v nedef. a def. konfiguraci budou:

$$dV = dX^{(1)} \cdot (dX^{(2)} \times dX^{(3)}) = \det \begin{pmatrix} dX_1^{(1)} & dX_1^{(2)} & dX_1^{(3)} \\ dX_2^{(1)} & dX_2^{(2)} & dX_2^{(3)} \\ dX_3^{(1)} & dX_3^{(2)} & dX_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{a}$$

$$dv = dx^{(1)} \cdot (dx^{(2)} \times dx^{(3)}) = \det \begin{pmatrix} dx_1^{(1)} & dx_1^{(2)} & dx_1^{(3)} \\ dx_2^{(1)} & dx_2^{(2)} & dx_2^{(3)} \\ dx_3^{(1)} & dx_3^{(2)} & dx_3^{(3)} \end{pmatrix} = \det(F) dV = JdV.$$

Jakobián transformace $J = \det(F) = \frac{dv}{dV}$ má tedy i fyzikální význam - je to změna elementu objemu při deformaci kontinua.

$J > 0$, pokud je $J = 1$, pak jde o tzv. izochorickou deformaci (objem se při deformaci nezmění), nebo může jít o translaci či rotaci kontinua jako tuhého celku.

Nansonův vztah – transformace plošného a objemového elementu

- Mějme element plochy dA s jednotkovou vnější normálou \mathbf{N} v nedeformované (referenční, materiálové) konfiguraci
- Po deformaci bude tento element v deformované konfiguraci da s vnější normálou \mathbf{n}
- Podobně pro element objemu dV v nedeformované a dv v deformované konfiguraci

$$da \mathbf{n} = J dA \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N},$$

$$dv = J dV.$$

$$d\mathbf{A} = dA \mathbf{N}; \quad d\mathbf{a} = da \mathbf{n}$$

The reference and current volumes of an element are

$$dV = d\mathbf{A}^T \cdot d\mathbf{L}; \quad dv = d\mathbf{a}^T \cdot d\mathbf{l}$$

where $d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$.

Therefore,

$$d\mathbf{a}^T \cdot d\mathbf{l} = dv = J dV = J d\mathbf{A}^T \cdot d\mathbf{L}$$

or,

$$d\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = dv = J dV = J d\mathbf{A}^T \cdot d\mathbf{L}$$

so,

$$d\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{F} = J d\mathbf{A}^T$$

So we get

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}$$

or,

$$da \mathbf{n} = J dA \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad \square$$

$d\mathbf{L}$ =element délky v nedeformované konfiguraci

Výpočet prvků inverzní matice přímo

Existuje ještě jiný způsob výpočtu inverzní matice - pomocí determinantů a subdeterminantů.

Matice A^{-1} má prvky $a_{i,j}$ kde i je řádek a j je sloupec pak
$$a_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot |A_{j,i}|}{|A|},$$
 kde $|A_{j,i}|$ je subdeterminant získaný z matice A vynecháním j -tého řádku a i -tého sloupce, $|A|$ je determinant matice A .

Podmínky kompatibility

- Lagrangeovské i Eulerovské tenzory přetvoření mají v 3-d šest nezávislých složek, které jsou odvozeny z vektoru posunutí \mathbf{U} pomocí šesti rovnic

$$2E_{KL} = \frac{\partial U_K}{\partial X_L} + \frac{\partial U_L}{\partial X_K} + \frac{\partial U_M}{\partial X_L} \frac{\partial U_M}{\partial X_K}$$

- Vyloučíme-li složky posuvů z těchto rovnic dostáváme tzv. rovnice kompatibility, které musí splňovat složky tenzorů přetvoření, aby z nich bylo možno dostat integrací složky posuvu
- Př. Pro malá přetvoření a rovinnou deformaci (plane strain) platí

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right], \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

- Pro 3-d přibudou ke třem rovnicím stejného typu, jako je rov. pro 2-d, další tři rovnice typu

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right].$$