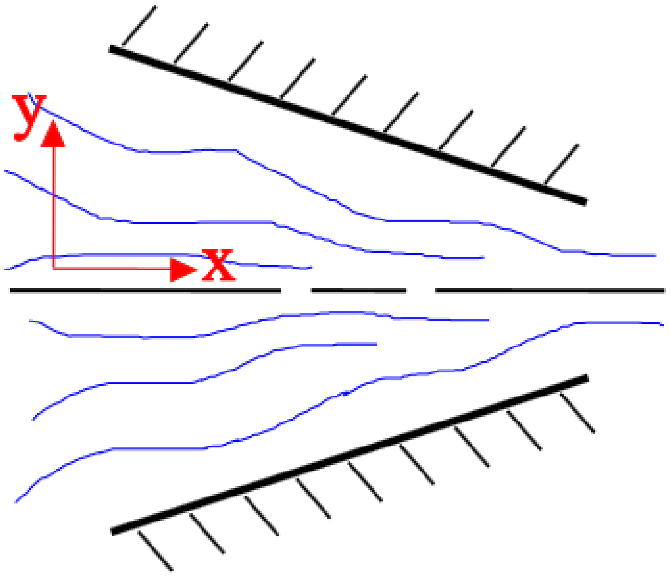
Materiálová derivace

Materiálová derivace

Pomocí materiálové derivace vypočteme časovou změnu nějaké veličiny (teploty, rychlosti apod.) materiálové částice, která se pohybuje rychlostí **v**. Na obrázku je kapalina, která protéká tryskou. Každá částice se zrychluje jak se dostává do části trysky se zmenšujícím se průřezem. Avšak soustředíme-li se na jeden bod prostoru **x**(x_1,x_2,x_3), rychlost kapaliny v tomto bodě se nemění. Je potřeba sledovat jednu částici materiálu, abychom uviděli, jak se zvyšuje její rychlost v čase.
K tomu je potřeba materiálová derivace, která udává rychlost změny nějaké veličiny.



Materiálové derivaci se též říká totální derivace, konvektivní derivace, substantivní derivace apod. Většinou se značí velkými písmeny:

$$\frac{D\Phi\left(\mathbf{X},t\right)}{Dt}=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}$$

Materiálová a lokální časová derivace

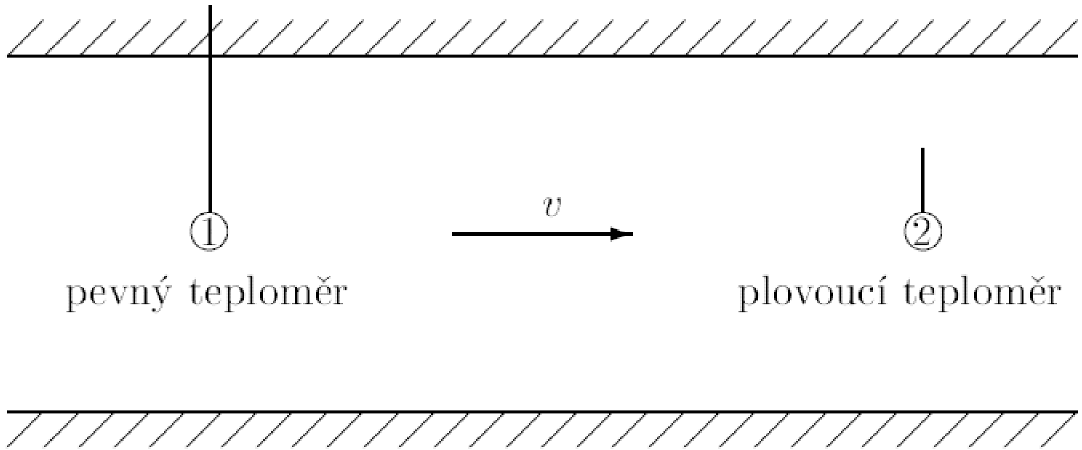
Materiálová časová derivace funkce $f(\mathbf{X},t)$ materiálových souřadnic $\mathbf{X}$

$$\frac{Df(\mathbf{X},t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\mathbf{X}=konst}$$ je parciální derivace podle času při konst. souř. $\mathbf{X}$.

Lokální časová derivace funkce $\phi(\mathbf{x},t)$ prostorových souřadnic $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\mathbf{x}=konst}$$ je parciální derivace podle času při konst. souř. $\mathbf{x}$.

Rozdíl mezi materiálovou a lokální časovou derivací



Teploměry měří změnu teploty

1. Měří teplotu na stálém místě tj. při konstantních prostorových souřadnicích **x**
2. Pohybuje se s proudem kapaliny – tedy spolu s materiálovou částicí – měří změnu teploty při konst. materiálových souřadnicích **X**

$$\frac{DT_2(\mathbf{X},t)}{Dt} = \left.\left(\frac{\partial T_2(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right)\right|_{\mathbf{X}=konst} .$$

$$\frac{\partial T_1(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left.\left(\frac{\partial T_1(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)\right|_{\mathbf{x}=konst}$$

Rychlost a zrychlení

$$\mathbf{x} = \chi\left(\mathbf{X}, t\right) \Rightarrow \mathbf{X} = \chi^{-1}\left(\mathbf{x}, t\right)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}\right)\bigg|_{\mathbf{X}=konst}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\chi^{-1}\left(\mathbf{x}, t\right), t),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}\right)\bigg|_{\mathbf{X}=konst}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\chi^{-1}\left(\mathbf{x}, t\right), t)$$

$$\mathbf{V}\left(\mathbf{X}, t\right) = \mathbf{v}\left(\mathbf{x}, t\right), \quad \mathbf{A}\left(\mathbf{X}, t\right) = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}, t\right).$$

Materiálová derivace v prostorových souřadnicích

Mějme funkci v prostorovém popisu $\phi(\mathbf{x},t)=\phi(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)$.

Mater. derivace podle času t při $\mathbf{X}$ konst:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}=konst}+\left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}\right|_{t=konst}\left.\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst},$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}=konst}=\frac{\partial\phi}{\partial t},\\
&\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}=\frac{D\phi}{Dt},\\
&\left.\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}=\mathbf{v}\\
&\left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}\right|_{t=konst}=\nabla\phi_{\mathbf{x}}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\nabla\phi_{\mathbf{x}}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet grad\,\phi_{\mathbf{x}}.$$