Posuvy, rychlosti a zrychlení

Pole posuvů

- Vektorové pole posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$ je funkcí referenční pozice $\mathbf{X}$ a času t, je v materiálovém (Lagrangeovském) popisu

  $\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X}$

- Vektorové pole posuvů $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ v prostorovém (Eulerovském) popisu je funkcí okamžité polohy $\mathbf{x}$ a času t

  $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x},t)$

$\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$

obě funkce mají stejné hodnoty, avšak jsou to funkce rozdílných argumentů

Pole rychlostí a zrychlení v materiálovém popisu

- V mechanice pevných těles jsou pohyb a deformace kontinua popsány pomocí pole posuvů
- V mechanice tekutin jsou hlavní veličiny pole rychlosti a zrychlení
- První a druhá derivace pohybu $\chi(\mathbf{X},t)$ jsou při **X** konstantním:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \left.\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst} = \left.\frac{\partial \chi(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \left.\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst} = \left.\frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t^2}\right|_{\mathbf{X}=konst} = \left.\frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X},t)}{\partial t^2}\right|_{\mathbf{X}=konst}.$$

často zapisujeme materiálovou časovou derivaci jako $\frac{Df}{Dt} = \left.\frac{\partial f(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}$

Rychlost a zrychlení v prostorových souřadnicích

Prostorovou rychlost $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ a zrychlení $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ dostaneme dosazením prostorových souřadnic $\mathbf{x}$ za $\mathbf{X}$ do materiálových veličin $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ a $\mathbf{A}(\mathbf{X},t)$

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t) \Rightarrow \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x},t) \Rightarrow$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \mathbf{V}\left(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),t\right) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \mathbf{A}\left(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),t\right) = \mathbf{a}(\mathbf{x},t),$$

Příklad: Stanovme rychlost a zrychlení v materiálovém a prostorovém popisu:
Je dáno: $x_1=X_1(1+\alpha t^3)$, $x_2=X_2$, $x_3=X_3$, kde $\alpha>0$ je konst.
Rychlost dostaneme derivací složek x_k podle času při konstantních složkách X_j:
Rychlost v materiálovém popisu: $V_1= 3\alpha t^2 X_1$, $V_2 = V_3 = 0$,
Rychl. v prost. Popisu dostaneme dosazením za X_1: $v_1= x_1 3\alpha t^2/(1+\alpha t^3)$
Zrychl. v mater. pop. : $A_1= 6\alpha t X_1$, $A_2 = A_3 = 0$,
Zrychl. v prostor. pop. po dosazení za X_1 : $a_1= x_1 6\alpha t/(1+\alpha t^3)$

Rychlost a zrychlení se musí v obou popisech shodovat: kupř. částice, která byla v čase t=0 v bodě X(1,1,1), je v čase t=2 v bodě x(1+8α,1,1).
$V_1= 12\alpha$, $v_1= (1+8\alpha)12\alpha/(1+8\alpha) = 12\alpha$,
$A_1= 12\alpha$, $a_1= (1+8\alpha)12\alpha/(1+8\alpha) = 12\alpha$,

Příklad:Jsou dány prostorové složky rychlosti kontinua, určete rychlost v materiálovém popisu a zrychlení v materiálovém i prostorovém popisu.

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, v_1 = \frac{3x_3}{1+t},$$

$$\Rightarrow \frac{Dx_1}{Dt} = \left.\frac{\partial x_1(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst},\text{ to je diferenciální rovnice prvního řádu}$$

$$\frac{Dx_1}{Dt} = \left.\frac{x_1}{1+t}\right|_{\substack{X_1=konst\\X_2=konst\\X_3=kons}} \Rightarrow x_1 = (1+t)\, f_1(X_1, X_2, X_3),$$

počát. podm. v čase t=0 je $x_1 = X_1 \Rightarrow f_1(X_1, X_2, X_3) = X_1,$

a tedy: $x_1 = (1+t)\, X_1$ a podobně $x_2 = (1+t)^2\, X_2, x_3 = (1+t)^3\, X_3.$

Dalším derivováním podle t při konst $\mathbf{X}$ dostaneme rychlost a zrychlení

v materiálovém popisu:

$$v_1 = X_1, \quad v_2 = 2(1+t)\, X_2, \quad v_3 = 3(1+t)^2\, X_3.$$

$$a_1 = 0, a_2 = 2X_2, \quad a_3 = 6(1+t)\, X_3.$$

Po dosazení prostorových souřadnic $\mathrm{x}_k$za X_k dostaneme veličiny v prostor. pop.

Materiálová derivace v prostorovém popisu

Mějme funkci v prostorovém popisu $\phi(\mathbf{x},t)=\phi(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)$.

Mater. derivace podle času t při $\mathbf{X}$ konst:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}=konst}+\left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}\right|_{t=konst}\left.\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst},$$

$$\left.\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}=konst}&=\frac{\partial\phi}{\partial t},\\
\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}&=\frac{D\phi}{Dt},\\
\left.\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst}&=\mathbf{v}\\
\left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}\right|_{t=konst}&=\nabla\phi_{\mathbf{x}}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet\nabla\phi_{\mathbf{x}}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{v}\bullet grad\,\phi_{\mathbf{x}}.$$

Příklad: v bodě **x** prostorové konfigurace je jistá fyzikální veličina ϕ spojená s pohybem kontinua dána výrazem:

$$\phi = \frac{1}{r}\exp\left(-at\right), \quad r = \left|\mathbf{x}\right| \neq 0, a = konst,$$

Pole rychlosti v prostorovem popisu: $v_1 = x_1 x_2 t, \quad v_2 = x_2^2 t, \quad v_3 = x_2 x_3 t.$

Určete materiálovou rychlost změny ϕ v bodě (0,a,0).

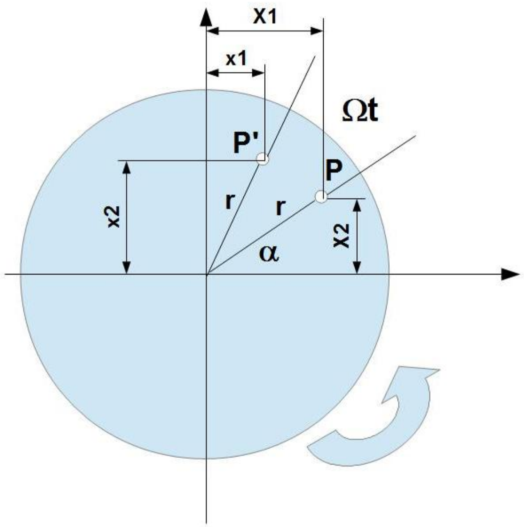
$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}\bullet\nabla\phi_{\mathbf{x}} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}\bullet grad\,\phi_{\mathbf{x}},$$

$$grad\,\phi_{\mathbf{x}} = \left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right\}^{\mathbf{T}} = -\frac{1}{r^3}\exp\left(-at\right)\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{v}\bullet grad\,\phi_{\mathbf{x}} = -\frac{t x_2}{r}\exp\left(-at\right), \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{a}{r}\exp\left(-at\right),$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{1}{r}\left(a + x_2 t\right)\exp\left(-at\right), \text{ v bodě } \left(0, a, 0\right) \frac{D\phi}{Dt} = -\left(1 + t\right)\exp\left(-at\right).$$

Příklad: kotouč rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω, určete obvodovou rychlost a dostředivé zrychlení částice, která se nachází na poloměru r.



Částice, která byla v čase t=0 v bodě P je v čase *t* v bodě P'. Stanovme **x**(**X**,t):

$$x_1(\mathbf{X},t) = r\cos(\alpha+\omega t) = X_1\cos\omega t - X_2\sin\omega t,$$

$$x_2(\mathbf{X},t) = r\sin(\alpha+\omega t) = X_1\sin\omega t + X_2\cos\omega t,$$

$$V_1(\mathbf{X},t) = -\omega(X_1\sin\omega t + X_2\cos\omega t) \Rightarrow v_1(\mathbf{x},t) = -\omega x_2,$$

$$V_2(\mathbf{X},t) = \omega(X_1\cos\omega t - X_2\sin\omega t) \Rightarrow v_2(\mathbf{x},t) = \omega x_1,$$

$$|\mathbf{v}| = \omega\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \omega r, |\mathbf{V}| = \omega\sqrt{X_1^2+X_2^2} = \omega r,$$

Složky zrychlení dostaneme derivací V_1 a V_2, nebo také pomocí grad**v** jako materiál. derivaci $\dfrac{D\mathbf{v}}{Dt}$:

$$A_1(\mathbf{X},t) = -\omega^2(X_1\cos\omega t - X_2\sin\omega t) \Rightarrow a_1(\mathbf{x},t) = -\omega^2 x_1,$$

$$A_2(\mathbf{X},t) = -\omega^2(X_1\sin\omega t + X_2\cos\omega t) \Rightarrow a_2(\mathbf{x},t) = -\omega^2 x_2, \qquad |\mathbf{A}| = |\mathbf{a}| = \omega^2 r.$$

$$grad\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + grad\mathbf{v}\bullet\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \end{Bmatrix} = -\omega^2\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}.$$

Jak se mění některá tenzorová pole s časem

Prostorový gradient rychlosti **l(x,**t) je nesymetrický tenzor druhého řádu

$$\mathbf{l}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}}=grad\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\Rightarrow l_{ab}=\frac{\partial v_a}{\partial x_b}.$$

Materiálová časová derivace deformačního gradientu je rovna materiálovému gradientu rychlosti

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X},t)=\frac{D\mathbf{F}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\chi(\mathbf{X},t)}{\partial\mathbf{X}}\right)=\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}\left(\frac{\partial\chi(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial\mathbf{X}}=Grad\,\mathbf{V}(\mathbf{X},t)\Rightarrow\dot{F}_{aA}=\frac{\partial v_a}{\partial X_A}.$$

V důsledku postupného parciálního derivování složené funkce dostaneme:

$$\mathbf{l}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\dot{\chi}(\mathbf{X},t)}{\partial\mathbf{X}}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\chi(\mathbf{X},t)}{\partial\mathbf{X}}\right)\mathbf{F}^{-1}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\Rightarrow\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{l}\mathbf{F}$$

Aditivní rozklad gradientu rychlosti na symetrickou a antisymetrickou část

$$\mathbf{l}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{l}(\mathbf{x},t)=\mathbf{d}(\mathbf{x},t)+\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{l}+\mathbf{l}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{l}-\mathbf{l}^T\right),$$

$$d_{ij}=\frac{1}{2}\left(l_{ij}+l_{ji}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad w_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Tenzor rychlosti deformace je symetrický $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)=\mathbf{d}^T(\mathbf{x},t)$

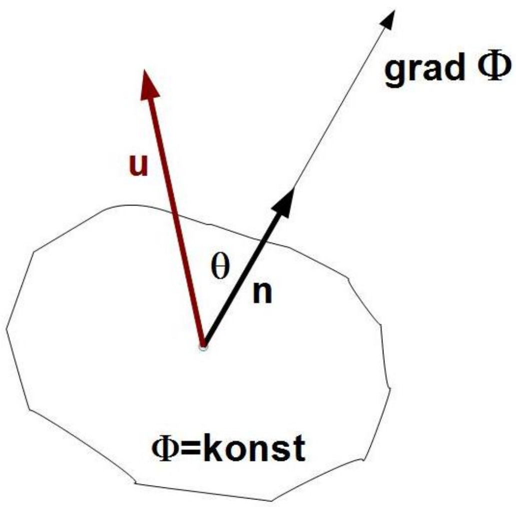
a vírový tenzor , nebo také spin, je antisym. $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=-\mathbf{w}^T(\mathbf{x},t)$.

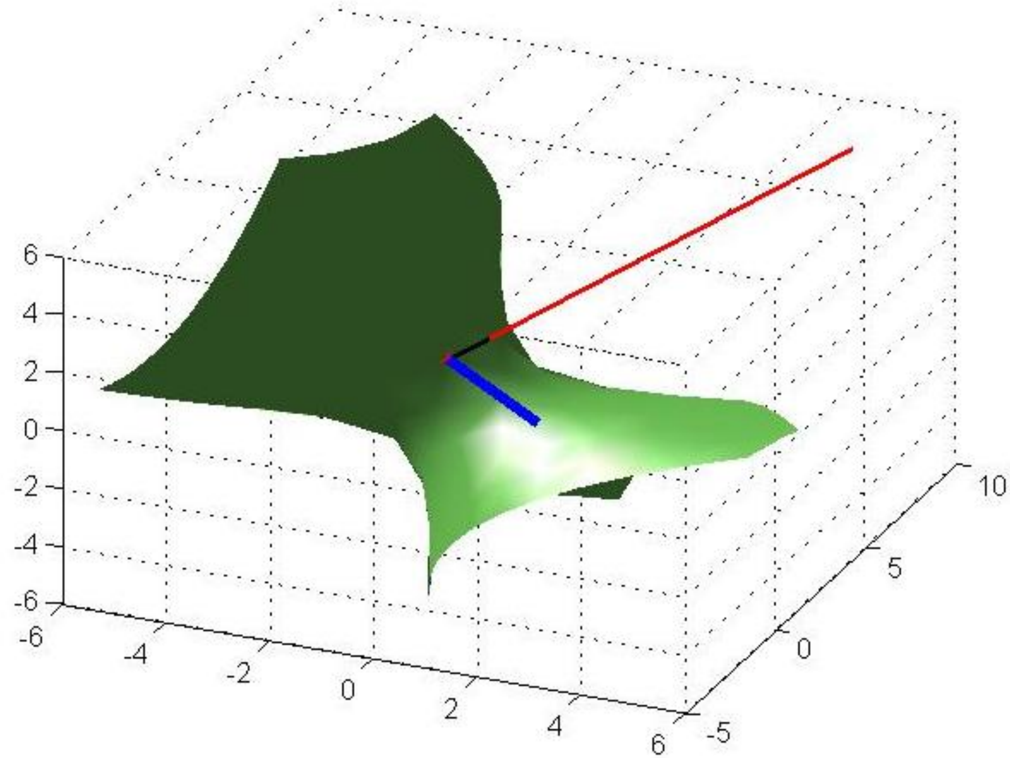
Materiálová časová derivace některých tenzorů přetvoření

$$\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{l}\mathbf{F}, \quad \mathbf{C}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \dot{\mathbf{C}}=\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}+\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}+\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}\mathbf{F}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{l}^{\mathrm{T}}+\mathbf{l}\right)\mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{C}}=2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}\mathbf{F}, \quad \mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}\right)\Rightarrow \dot{\mathbf{E}}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}\mathbf{F}$$

Směrová derivace (derivace ve směru vektoru **u**)





Mějme funkci $\Phi(x)=\Phi(x_1, x_2, x_3)$. Izoplocha funkce je místo bodů, pro něž je $\Phi(x)$=konst. Normála ***n*** k izoploše má stejný směr jako gradient funkce $\Phi(x)$ v daném bodě. Zvolme nějaký jednotkový vektor ***u*** v daném bodě, pak směrová derivace $\Phi(x)$ ve směru vektoru ***u*** je skalární součin gradientu Φ a vektoru ***u*** – je to tedy velikost průmětu gradientu Φ do směru ***u***.
Obrázek vpravo je znázorněním následujícího příkladu.

Příklad

$\Phi\left(\mathbf{x}\right)=x_1^2+3x_2x_3,$ vypočtěte směrovou derivaci v bodě x $\left(2,-1,0\right)$ ve směru

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}.\quad D_u\Phi\left(\mathbf{x}\right)=grad\Phi\bullet\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}2x_1\\3x_3\\3x_2\end{Bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2x_1+3x_3+3x_2\right),$$

$$D_u\Phi\left(2,-1,0\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ekvivalentni definice:

$$D_u\Phi\left(\mathbf{x}\right)=\frac{d}{d\varepsilon}\Phi\left(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{u}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\Rightarrow\Phi\left(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{u}\right)=\left(x_1+\varepsilon\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+3\left(x_2+\varepsilon\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x_3+\varepsilon\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\Rightarrow D_u\Phi\left(\mathbf{x}\right)=2x_1\frac{1}{\sqrt{3}}+3\left(x_2+x_3\right)\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

```
Clear
%body v okolí (2,-1,0)
x1=-3:7;
x2=-6:4;
x3=-5:5;
[X,Y,Z] = meshgrid(x1,x2,x3); %vytvoření pravid sítě
fi=X.^2+3*Y.*Z; % funkce fi
figure
isosurface(X,Y,Z,fi,4) % vykreslení izosurface pro fi=4
%fi=4 je hodnota funkce v bodě (2,-1,0)
grid on
hold
%vykreslení daného bodu na izoploše
plot3(2,-1,0,'r*')
%vykreslení gradientu fi (modře)
plot3([2 4],[-1 0],[0 -3],'LineWidth',2)
%vykreslení směru u (červeně)
plot3([2 2+10/sqrt(3)],[-1 -1+10/sqrt(3)],[0 10/sqrt(3)],'r','LineWidth',2)
% vykreslení jednotkového vektoru u (černě)
plot3([2 2+1/sqrt(3)],[-1 -1+1/sqrt(3)],[0 1/sqrt(3)],'k','LineWidth',2)
```

Derivace deformačního gradientu ve směru vektoru rychlosti **v**

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}\left(\mathbf{X},t\right)=\frac{d}{d\varepsilon}Grad\left(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{v}\right)\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{X}}\Rightarrow$$

Materiálová časová derivace **F** je rovna směrové derivaci

ve směru vektoru rychlosti **v** : $\dfrac{D\mathbf{F}\left(\mathbf{X},t\right)}{Dt}=D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}\left(\mathbf{X},t\right).$

Platí obecně projakékoli materiálové pole $\Phi\left(\mathbf{X},t\right)$:

$$\frac{D\Phi\left(\mathbf{X},t\right)}{Dt}=D_{\mathbf{v}}\Phi\left(\mathbf{X},t\right).$$

Př.:derivace Greenova tenzoru přetvoření $\mathbf{E}\left(\mathbf{X},t\right)$

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{E}\left(\mathbf{X},t\right)=\frac{1}{2}D_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{F}^{T}\mathbf{F}-\mathbf{I}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}^{T}\right)\mathbf{F}+\mathbf{F}^{T}\left(D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}\right)\right)=\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}\,\mathbf{F}.$$