Podmínky plasticity

PLASTICITA

PODMÍNKY PLASTICITY

- **Jednoduché zatěžování**
- Jednoosý tah (tlak) $|\sigma| \leq \sigma_k$
- Prostý smyk $\tau \leq \tau_k$

- **Víceosá napjatost**
  Budeme předpokládat, že plastický stav v některém materiálovém bodě nastane, když nějaká kombinace složek tenzoru napětí dosáhne nějaké kritické hodnoty

$$f\left(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{13}\right)=k,$$

kde k je nějaká materiálová vlastnost, která je určena experimentálně.

Napjatost lze reprezentovat hlavními napětími a hlavními směry:

$f\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2},\boldsymbol{n_3}\right)=k,$ odezva izotropního materiálu nezávisí

na směru: $f\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right)=k,$ f musí být symetrickou funkcí hlavních napětí.

Invarianty tenzoru napětí nezávisí na směru: $f\left(I_1,I_2,I_3\right)=k,$

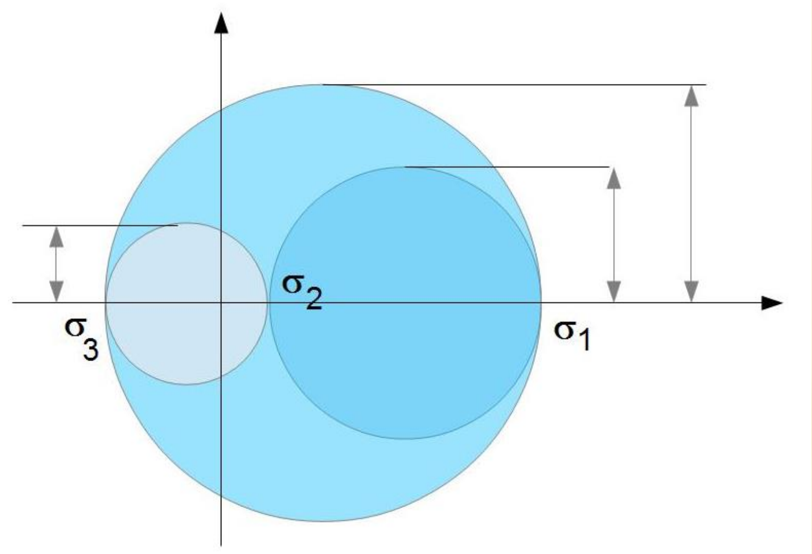
nebo častěji $f\left(I_1,J_2,J_3\right)=k,$ kde J_2,J_3 jsou invarianty deviátoru napětí.

Nezávisí-li plastický stav na hydrostatickém napětí:

$$f\left(J_2,J_3\right)=k.$$

TRESCOVA A VON MISESOVA PODMÍNKA PLASTICITY

- **Trescova** (Tresca-Guest) podmínka maximálního smykového napětí



$$\max\left\{\frac{1}{2}\left|\sigma_1-\sigma_2\right|,\frac{1}{2}\left|\sigma_2-\sigma_3\right|,\frac{1}{2}\left|\sigma_1-\sigma_3\right|\right\}=k.$$

k můžeme určit tahovou zkouškou,
kdy $\sigma_1=\sigma_k$ (mez kluzu materiálu v tahu),
$\sigma_2=\sigma_3=0 \Rightarrow k=\sigma_k/2$.

Při prostém smyku $\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\tau \Rightarrow$
$k=\tau_k$ (mez kluzu materiálu ve smyku).

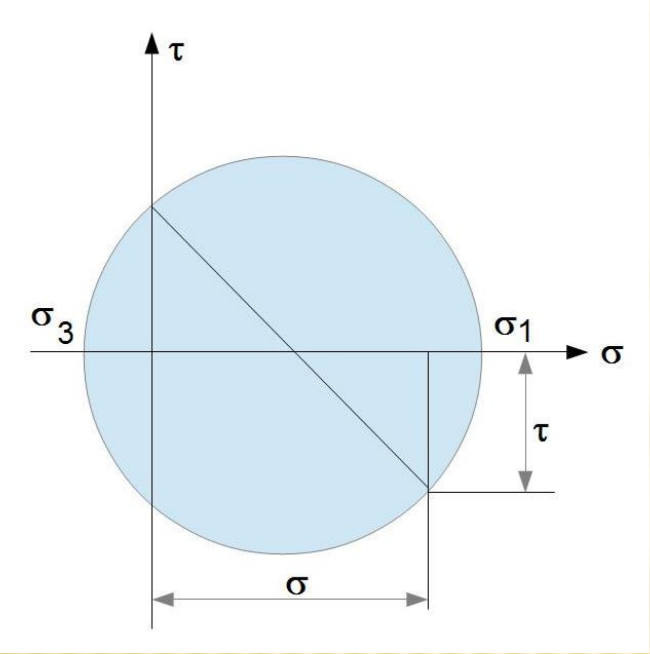
Von Misesova podmínka plasticity vychází z HMH hypotézy, která srovnává různé napjatosti podle deformační energie na změnu tvaru:

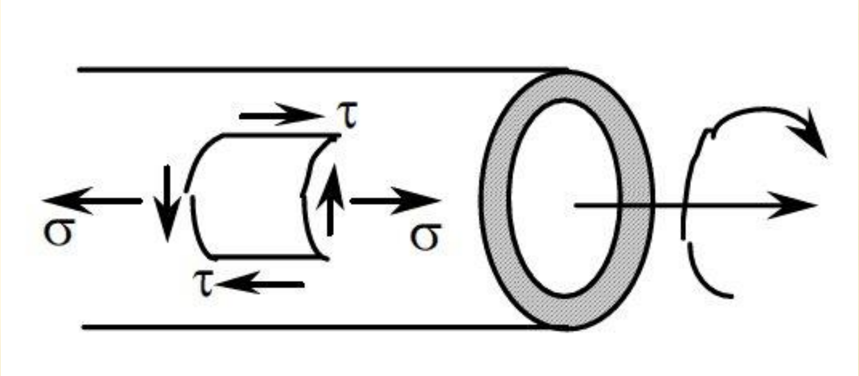
$$\text{V hlavních napětích: } \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2}=\sigma_k,$$

$$\text{nebo: } \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z\right)+3\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)}=\sigma_k.$$

EXPERIMENTY TAYLORA A QUINNEY – KTERÁ ZE DVOU PODMÍNEK JE BLIŽŠÍ SKUTEČNOSTI

- Série experimentů (1932), kdy tenké trubky z mědi a oceli byly podrobeny kombinovanému zatížení tahovou silou a kroutícím momentem. Stěna trubky je ve stavu dvouosé napjatosti $\sigma_{11}=\sigma$ a $\sigma_{12}=\tau$, ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové.



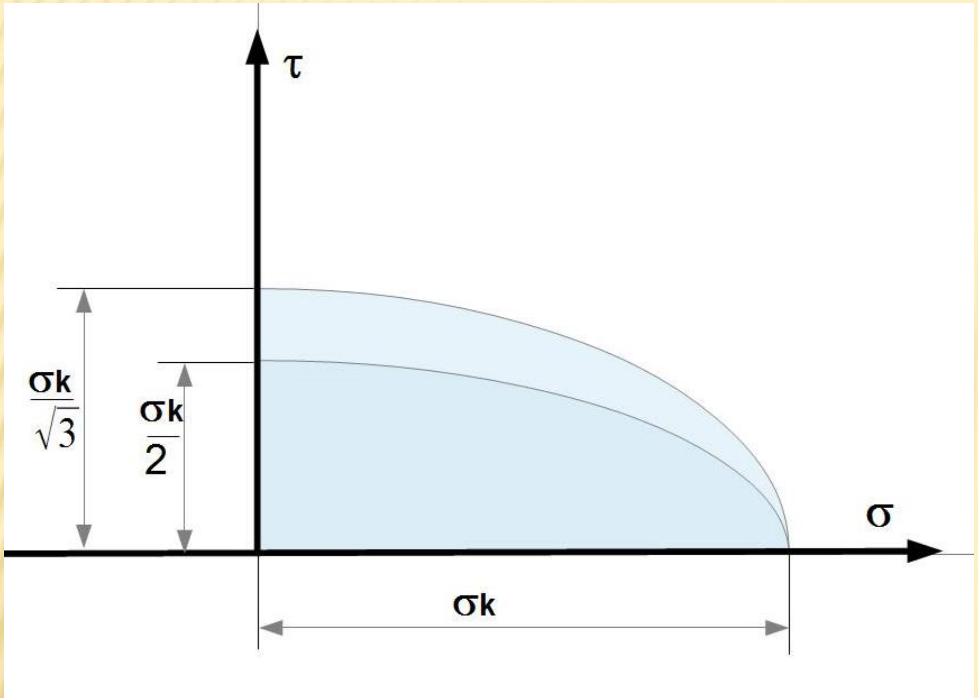


Hlavní napětí: $\sigma_2 = 0, \sigma_{1,3} = \dfrac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$

Tresca: $\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_k^2 \quad \Rightarrow \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\dfrac{\tau}{\sigma_k/2}\right)^2 = 1$

Von Mises: $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_k^2 \quad \Rightarrow \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\dfrac{\tau}{\sigma_k/\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

SROVNÁNÍ TRESCOVY A VON MISESOVY PODMÍNKY



$$\text{Tresca: } \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sigma_k/2}\right)^2 = 1$$

$$\text{Von Mises: } \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sigma_k/\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

V prostoru σ-τ jsou mezní čáry pro obě podmínky elipsy. Delší poloosu mají stejnou, liší se jejich kratší poloosy. Von Misesova elipsa je tlustší. Taylor&Quinney měnili ve svých experimentech poměr tahového a smykového napětí. Experimenty ukázaly, že plastický stav vzniká při kombinaci napětí, odpovídající bodům ležícím mezi oběma mezními elipsami. Tyto body ležely blíže k Von Misesově elipse. Maximální rozdíl mezi napětími podle těchto dvou kriterií je 15%.

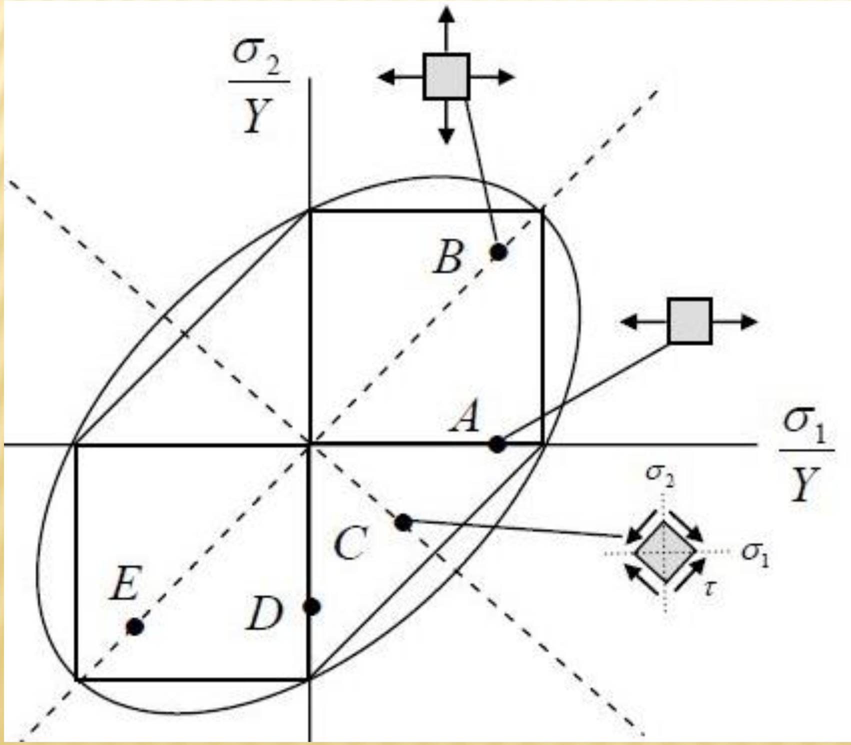
ZOBRAZENÍ MEZNÍCH ČAR PODLE TRESCA A VON MISES V SOUŘADNICÍCH (σ_1, σ_2)

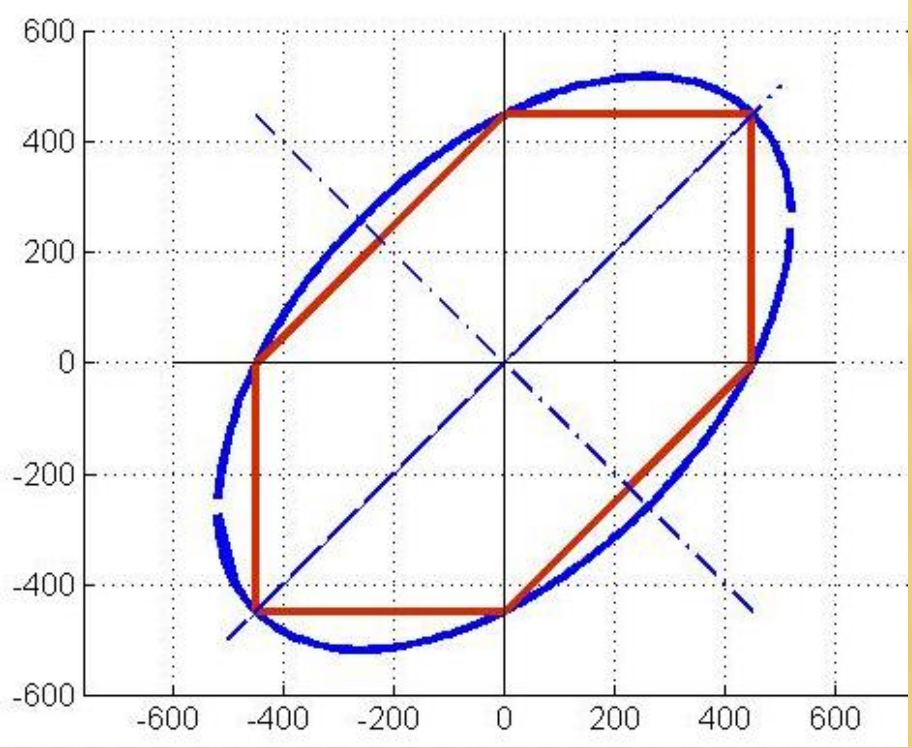
- Rovinná napjatost

$$\sigma_1, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0.$$

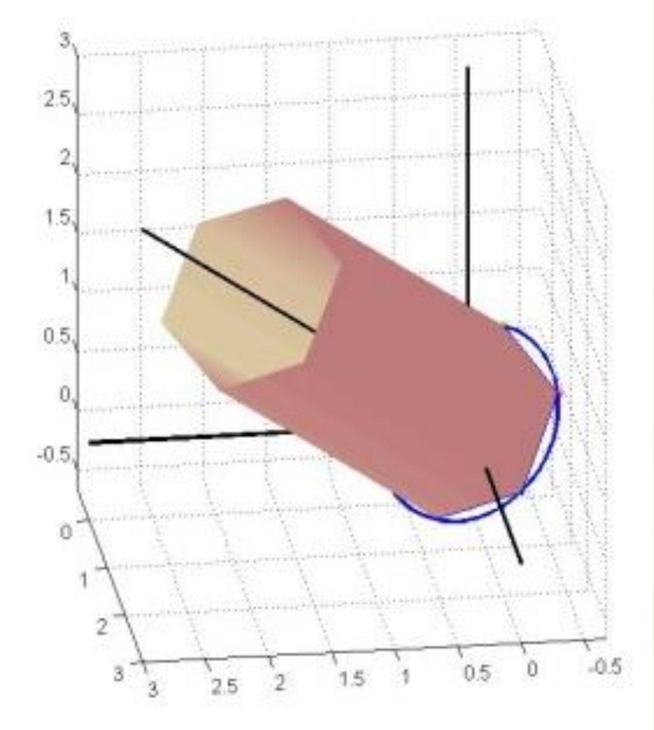
$$Tresca \quad \max\left\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\right\} = \sigma_k,$$

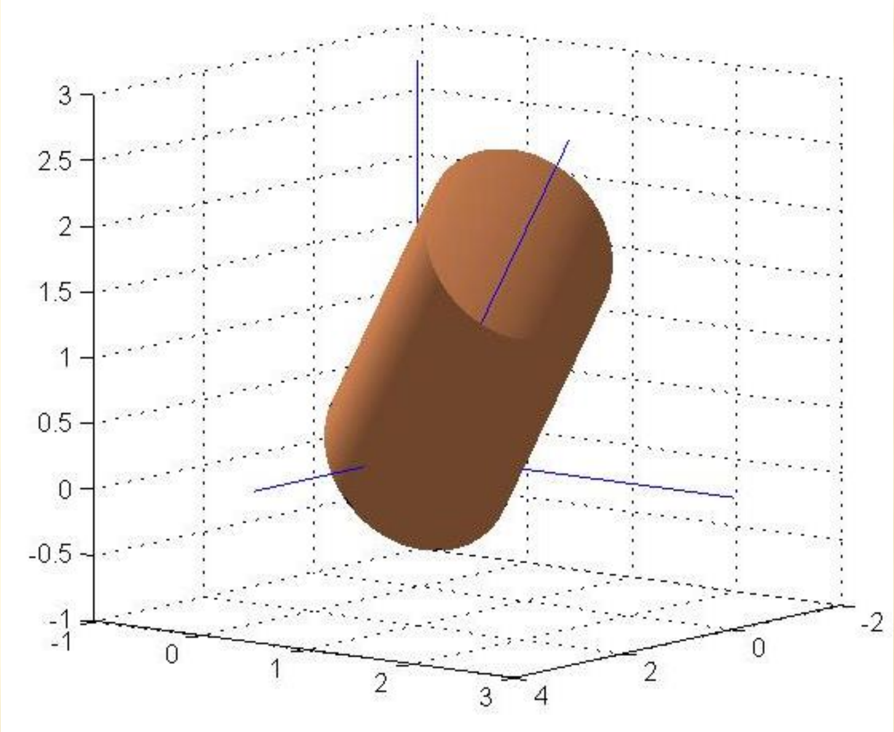
$$Von\ Mises \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_k^2$$





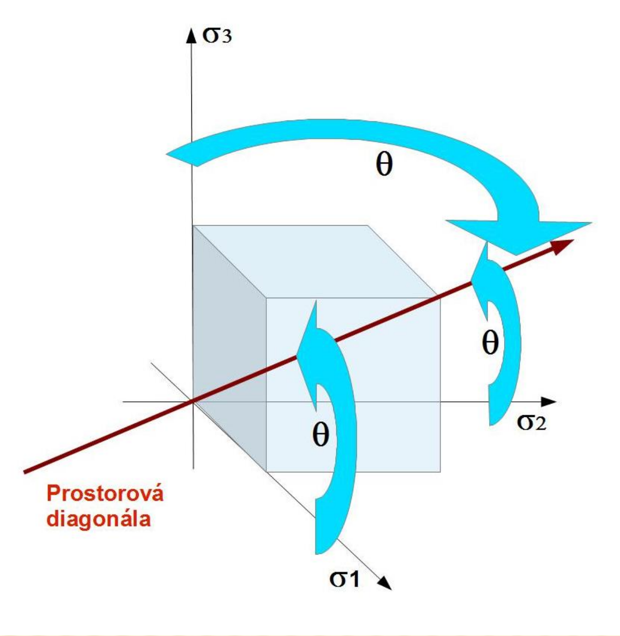
ZOBRAZENÍ MEZNÍCH ČAR PODLE TRESCA A VON MISES V SOUŘADNICÍCH ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

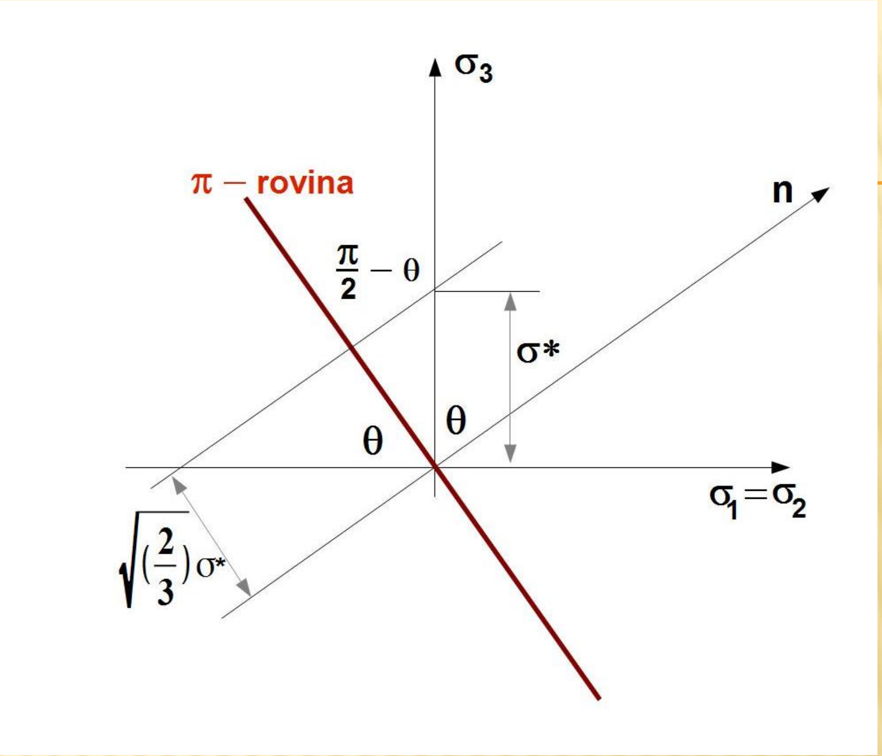




Mezní plochy ve 3-d souřadnicích ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) podle obou těchto teorií plasticity jsou válce, jejichž osa je diagonála prvního oktantu (prostorová diagonála), která svírá se všemi souřadnými osami stejný úhel θ. Von Mises plocha má kruhový průřez, Tresca plocha je šestiboký válec. Mezní čáry na předchozím slajdu (elipsa a šestiúhelník) jsou řezy rovinou (σ_1, σ_2) těmito válci.

PROSTOROVÁ DIAGONÁLA A π - ROVINA





Úhel prostorové diagonály: $3\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = 1/\sqrt{3},\ \theta \doteq 54{,}7^o$.

V rovinách kolmých na diagonálu: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = konst$ $\left(= 3\sigma_s\right.$ hydrostatické napětí$\left.\right)$.

Rovinu, která obsahuje počátek a tedy $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,$ označme jako π-rovina (deviatorická rovina).

Nezávisí-li plastický stav na hydrostatickém napětí, pak každá napjatost může být s hlediska plasticity representována bodem v π-rovině $\left(\sigma_1 - \sigma_s, \sigma_2 - \sigma_s, \sigma_3 - \sigma_s\right)$ - deviátorovou napjatostí. Přičtením hydrostatické napjatosti posouváme hodnoty napětí ve směru prostorové diagonály.

π - ROVINA – PRŮMĚTY NAPJATOSTI

Promítneme-li body na Trescově a Misesově mezném válci do π - roviny, dostaneme mezné čáry v deviátorové rovině (kružnici a šestiúhelník do ní vepsaný). Poloměr kružnice je $\sqrt{2/3}\sigma_k$ a čárkovaně značené osy jsou průměty souřadnicových os $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ do deviátorové roviny.