Kulová tlustostěnná nádoba

Stísněná plastická deformace – šíření plastické oblasti

# PLASTICITA

# TLUSTOSTĚNNÁ KULOVÁ NÁDOBA

- Určíme odezvu kulové tlustostěnné tlakové nádoby na zatížení vnitřním přetlakem
- V nádobě vzniká tříosá napjatost
- Budeme předpokládat, že nádoba je z pružně-ideálně plastického materiálu
- Stanovíme napětí a deformaci v elastické oblasti
- Stanovíme tlak při počínajících plastických deformacích
- Stanovíme mezný tlak, při kterém by byl plášť nádoby celý v plastickém stavu
- Určíme závislost mezi zatěžujícím tlakem a velikostí (poloměrem) plastické oblasti
- Určíme napětí v plášti nádoby v elasticko-plastickém stavu
- Určíme zbytková napětí po odlehčení
- Vypočteme napětí při novém zatížení a ukážeme, jak se nádoba přizpůsobila danému typu zatížení

- Potřebné výpočty jsou poměrně komplikované. Pro přehlednost jsou uváděny jen základní kroky a výsledky. Předpokládám, že posluchači projdou celou úlohu samostatně a odvodí vztahy pro jednotlivé veličiny.

## ELASTICKÉ ŘEŠENÍ

Napětí radiální $\sigma_r = \sigma_r(r)$, obvodové $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$

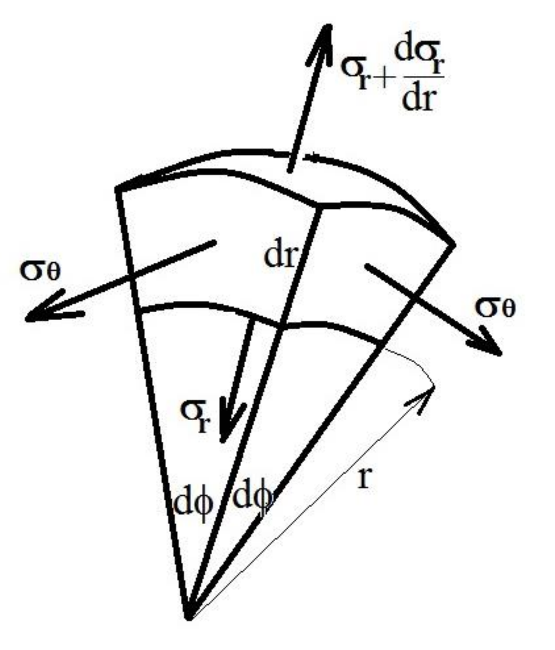
i radiální posuv $u(r)$ jsou funkcí pouze poloměru $r$.

Podmínka rovnováhy:

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}\right)\left((r+dr)d\phi\right)^2 - \sigma_r (rd\phi)^2 - 4\sigma_\theta r d\phi dr \sin\frac{d\phi}{2} = 0.$$

Vztahy mezi posuvem a radiálním a obvodovým přetvořením:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta O}{O} = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u(r)}{r},\ \varepsilon_r = \frac{\Delta(dr)}{dr} = \frac{(u+du)-u}{dr} = \frac{du}{dr}.$$




Rovnice kompatibility: $\dfrac{d\varepsilon_\theta}{dr} = -\dfrac{u(r)}{r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr} \Rightarrow \dfrac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \dfrac{1}{r}(-\varepsilon_\theta + \varepsilon_r).$

Hookeův zákon pro tříosou napjatost:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left((1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right), \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{D}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r), \quad \sigma_r = \frac{E}{D}\left((1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_\theta\right),\ D = \left(1-\nu-2\nu^2\right).$$

Podm. rovnov. po úpravě: $\dfrac{d\sigma_r}{dr} - \dfrac{2}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0,$

po dosazení za napětí z Hookeova zákona $\Rightarrow$ rovnice pro radiální posuv:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - 2\frac{u}{r^2} = 0 \ \Rightarrow u(r) = Cr^\lambda \ \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \quad u = C_1 r + C_2 r^{-2}.$$

# NAPĚTÍ A RADIÁLNÍ POSUV V ELASTICKÉM STAVU

Dosadíme radiální posuv $u = C_1 r + C_2 r^{-2}$ do napětí:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{D}\left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr}\right), \quad \sigma_r = \frac{E}{D}\left(\left(1-\nu\right)\frac{du}{dr} + 2\nu \frac{u}{r}\right), \; D = \left(1 - \nu - 2\nu^2\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{D}\left(C_1\left(1+\nu\right) + C_2 r^{-3}\left(1-2\nu\right)\right) = A + B\rho^{-3}, \; \rho = \frac{r}{R}, \; R = \text{vnější poloměr},$$

$$\sigma_r = \frac{E}{D}\left(C_1\left(1+\nu\right) - C_2 r^{-3}\, 2\left(1-2\nu\right)\right) = A - 2B\rho^{-3},$$

konstanty $A$ a $B$ (mají rozměr napětí) určíme z okrajových podmínek.

Radiální posuv:

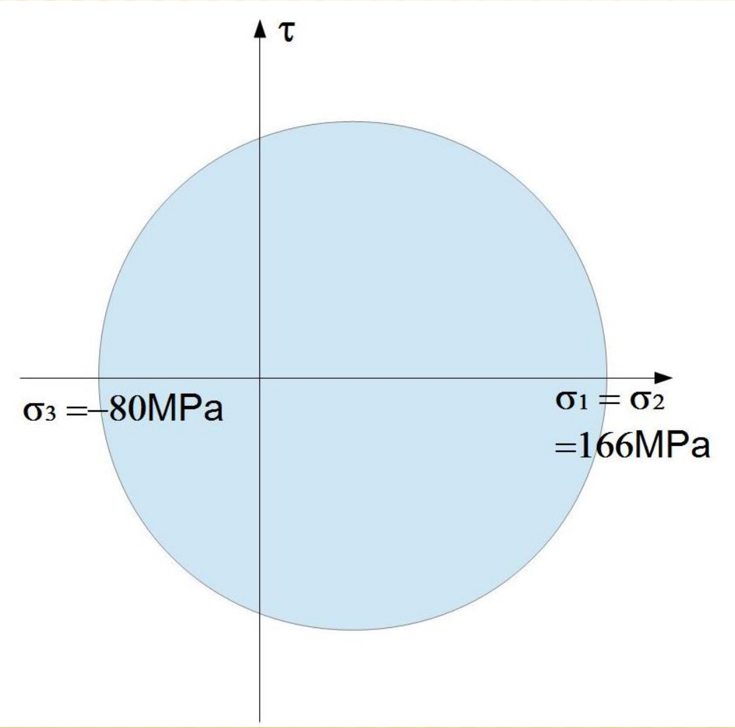
$$u\left(\rho\right) = R\rho\varepsilon_\theta = \frac{R}{E}\rho\left(\left(1-\nu\right)\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right) = \frac{R}{E}\rho\left(\left(1-2\nu\right)A + \left(1+\nu\right)B\rho^{-3}\right).$$

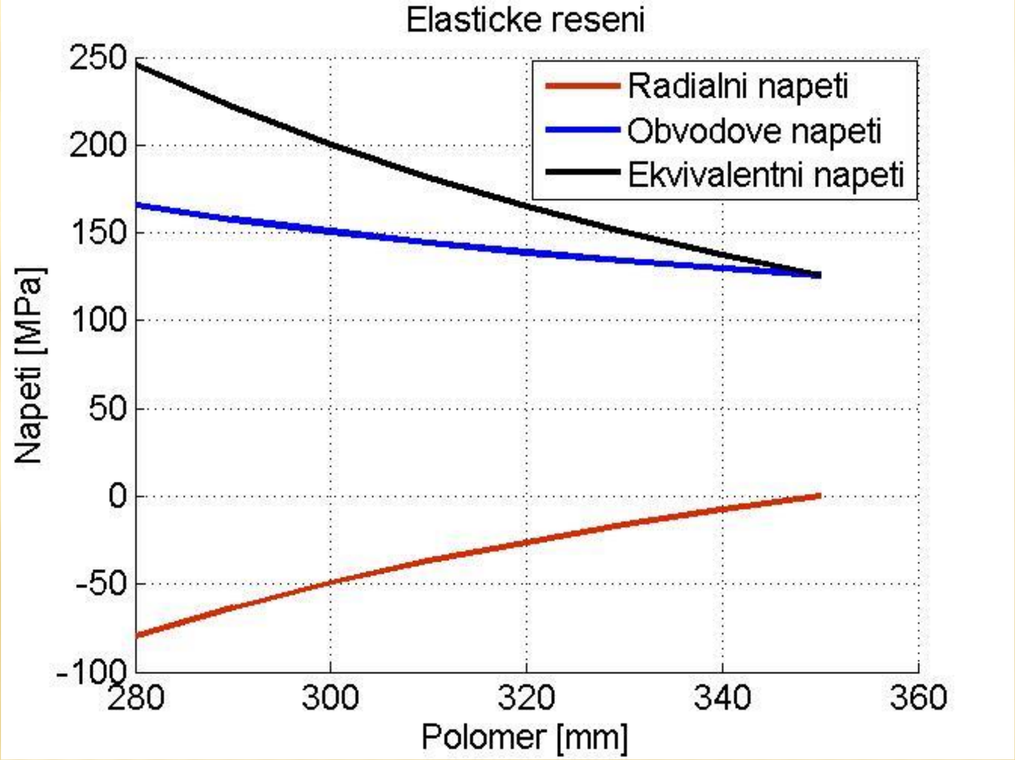
# PŘÍKLAD – SFÉRICKÁ NÁDOBA V ELASTICKÉM STAVU

- Kulová tlustostěnná nádoba je zatížena přetlakem *p=80 MPa* na vnitřním poloměru $r_1$*=280mm* a je nezatížená na vnějším poloměru $r_2$*=350mm*. Máme určit napětí, změnu vnějšího poloměru a bezpečnost vzhledem k mezi kluzu *Y=450 MPa*. Modul pružnosti $E=2*10^5$ *MPa* a Poissonovo číslo $\nu=0,3$.

$$\rho=\frac{r}{r_2},\ \rho_1=r_1/r_2=0,8;\ \rho_2=1.\ \text{Okrajové podmínky: } \sigma_r\left(\rho_1\right)=-p,\quad \sigma_r\left(\rho_2\right)=0$$

$$A-2B\rho_1^{-3}=-p,\quad A-2B=0\Rightarrow A=\frac{-p}{\left(1-\rho_1^{-3}\right)}=83,9\ MPa,\ B=A/2.$$



# DEFORMACE NÁDOBY A SOUČINITEL BEZPEČNOSTI

Změna vnějšího poloměru:

$$u\left(\rho_2\right)=\frac{r_2}{E}\left(\left(1-2\nu\right)A+\left(1+\nu\right)B\right)=\frac{r_2}{E}\frac{3}{2}A\left(1-\nu\right)=\text{ 0.154 mm.}$$

Maximální ekvivalentní napětí je na vnitřním poloměru a je stejné podle Guesta i podle HMH:

$$\sigma_1\left(\rho_1\right)=\sigma_2\left(\rho_1\right)=\sigma_\theta\left(\rho_1\right),\ \sigma_3\left(\rho_1\right)=\sigma_r\left(\rho_1\right):$$

Guest $\left(\tau_{\max}\right)$: $\quad \sigma_{ekv}=\sigma_1-\sigma_3=\sigma_\theta-\sigma_r=\frac{3}{2}A\rho_1^{-3}=\frac{3}{2}A\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3=246\ MPa.$

$$HMH:\quad \sigma_{ekv}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}=\sigma_\theta-\sigma_r=246\ MPa.$$

Součinitel bezpečnosti: $\text{n}=\frac{\sigma_k}{\sigma_{ekv}}=\frac{450}{246}\doteq 1,7$

# POKRAČOVÁNÍ PŘÍKLADU: POČÁTEK PLASTICKÝCH DEFORMACÍ A MEZNÍ STAV

Při zvyšování zatěžujícího tlaku se plastické deformace začnou rozvíjet od vnitřního okraje sférické nádoby a postupně zasáhnou celý její plášť. Určíme nejvyšší tlak $\boldsymbol{p_E}$ při kterém je ještě celý plášť v elastickém stavu a určíme mezný tlak $\boldsymbol{p_M}$, při kterém by celý plášť byl ve stavu plastickém.
Při tlaku $\boldsymbol{p_E}$ bude ekvivalentní napětí na vnitřním okraji právě rovno napětí na mezi kluzu $\sigma_k$. Vyjdeme z elastických závislostí:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{3}{2}\tilde{A}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \sigma_k \Rightarrow \tilde{A} = \frac{2}{3}\sigma_k\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3, \tilde{A} = \frac{-p_E}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} \Rightarrow p_E = \frac{2}{3}\sigma_k\left(1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right) = 146\ MPa.$$

Pro určení mezného tlaku $\boldsymbol{p_M}$ je nutné nově odvodit vztahy pro napětí v plastické oblasti. Musí zde platit podmínka rovnováhy (dříve odvozená) a podmínka plasticity:

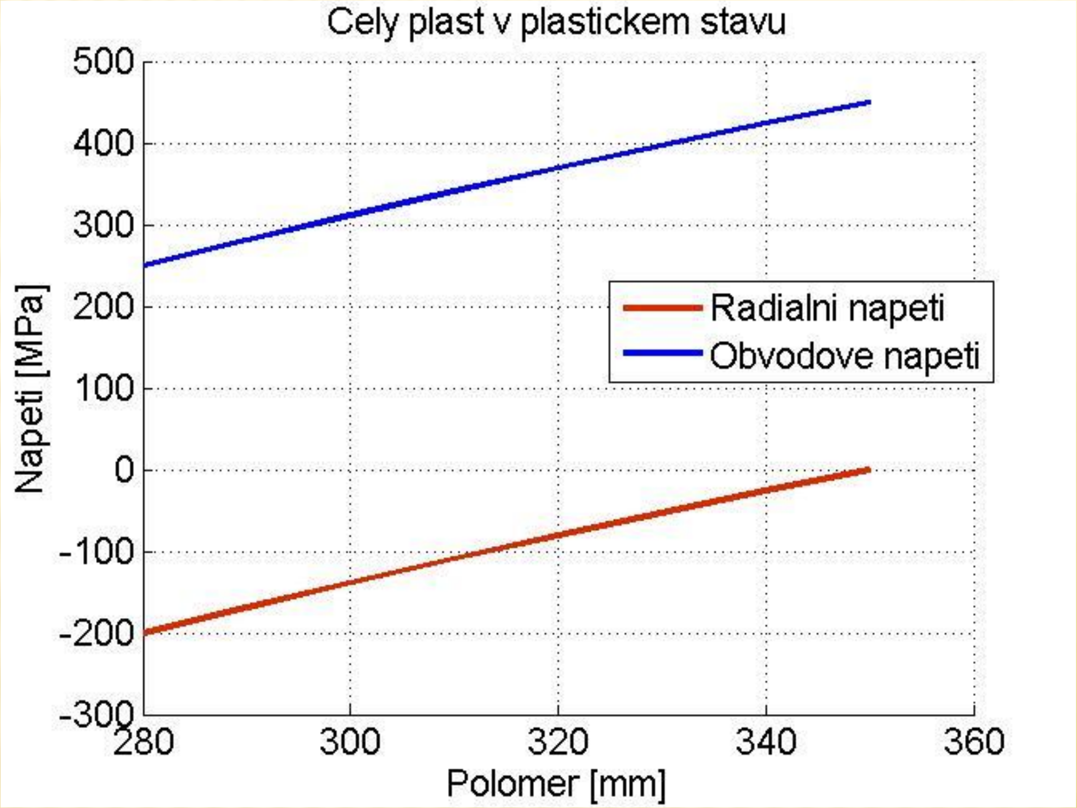
$$\text{Podm. rovnov.: } \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2}{r}\left(\sigma_\theta - \sigma_r\right) = 0, \quad \text{podm. plasticity: } \sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_k.$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_r}{d\rho} - \frac{2}{\rho}\sigma_k = 0, \Rightarrow \sigma_r = 2\sigma_k\left(\ln\rho + C\right).$$

$$\text{Okrajové podmínky: } \sigma_r\left(\rho_1\right) = -p_M, \sigma_r\left(\rho_2\right) = 0 \Rightarrow C = 0,\ p_M = 2\sigma_k \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 201 MPa.$$

$$\text{Napětí v plastickém stavu:} \sigma_r = 2\sigma_k \ln\rho, \qquad \sigma_\theta = \sigma_k\left(1 + 2\ln\rho\right).$$

# MEZNÝ STAV – NAPJATOST, KTERÁ BY HYPOTETICKY ODPOVÍDALA TLAKU $p_M$ =201 MPa




Radiální a obvodová napětí v grafu jsou ekvidistantní logaritmické křivky, rozdíl ordinát je roven mezi kluzu

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_k$$

V praxi bychom zatížení mezným tlakem neriskovali. Kdybychom však zvolili součinitel bezpečnosti Vzhledem k meznému stavu $n_M$=1,5, pak dovolený tlak by byl:

$$p_{DOV} = \frac{p_M}{n_M} = \frac{201}{1{,}5} = 134 \text{ MPa}.$$

Vidíme, že je $p_{DOV} < p_E$

= tlak, při kterém vzniknou první plastické deformace.

# PRUŽNĚ-PLASTICKÝ STAV PŘI ZATÍŽENÍ TLAKEM $p_E$<$p$< $p_M$

- Předpokládejme, že při zatížení tlakem p, kde $p_e<p<p_m$, bude se plastická oblast rozkládat od vnitřního okraje až k poloměru c, kde $r_1<c<r_2$, vyplní tedy dutou kouli o vnitřním poloměru $r_1$ a vnějším poloměru c. V této oblasti platí podmínka rovnováhy a podmínka plasticity, které známe z dřívějších výpočtů. Plastickou deformaci v této oblasti bude omezovat (tísnit) vnější elastická oblast, která vyplňuje dutou kouli s vnitřním poloměrem c a vnějším poloměrem $r_2$. Elastická oblast na společné hranici působí na plastickou oblast určitým tlakem $p_c$ a brání jí tím ve volnému rozvoji plastických deformací. Podle zákona akce a reakce působí plasticá oblast na pružnou oblast rovněž tlakem $p_c$ a tento tlak je právě tak velký, aby napětí na poloměru c splňovala podmínku plasticity ($p_c$ je analogický tlaku $p_e$ v předchozích výpočtech). Pro zvolený poloměr c můžeme $p_c$ stanovit analogicky:

$$p_c = \frac{2}{3}\sigma_k\left(1-\left(\frac{c}{r_2}\right)^3\right).$$

V elastické oblasti budou napětí dána elastickými vztahy:

$$\tilde{A} = \frac{-p_c}{1-\left(\frac{r_2}{c}\right)^3} = \frac{2}{3}\sigma_k\left(\frac{c}{r_2}\right)^3, \quad \tilde{B} = \frac{1}{2}\tilde{A}.$$

$$\sigma_\theta = \tilde{A} + \tilde{B}\rho^{-3} = \tilde{A}\left(1+\frac{1}{2}\rho^{-3}\right), \quad \sigma_r = \tilde{A} - 2\tilde{B}\rho^{-3} = \tilde{A}\left(1-\rho^{-3}\right), \ \rho = \frac{r}{r_2}.$$

# PRUŽNĚ-PLASTICKÝ STAV PŘI ZATÍŽENÍ TLAKEM $p_E < p_{ep} < p_M$ PLASTICKÁ OBLAST

- V předchozích výpočtech jsme na základě podmínky rovnováhy a podmínky plasticity určili radiální a tečné napětí v plastickém stavu:

$$\sigma_r = 2\sigma_k \left(\ln \rho + C\right), \quad \sigma_\theta = \sigma_k + \sigma_r .$$

Okrajové podmínky pro plastickou oblast:

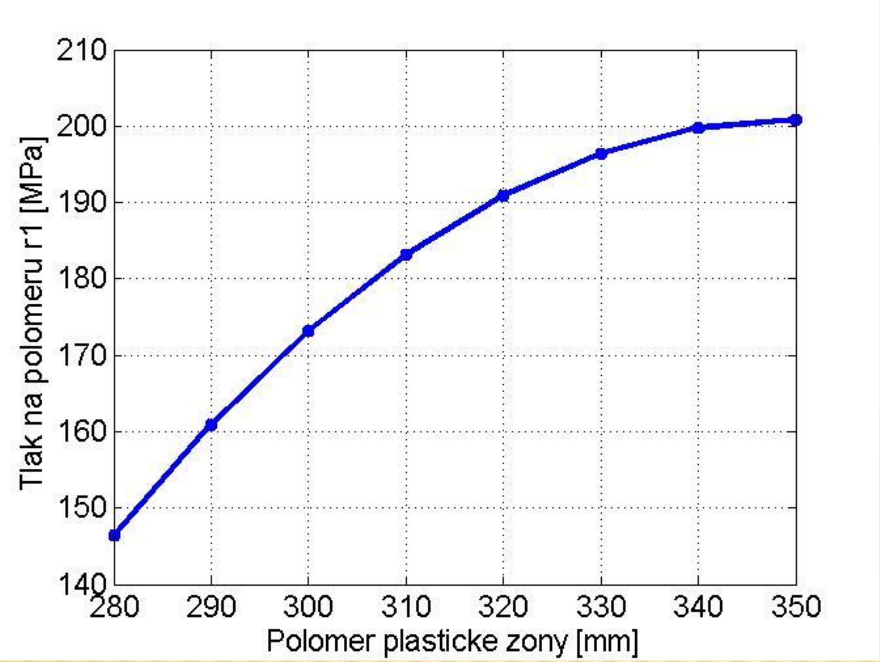
$$\sigma_r\left(\rho_c\right) = -p_c, \quad \sigma_r\left(\rho_1\right) = -p_{ep}, \quad p_c = \frac{2}{3}\sigma_k \left(1 - \left(\frac{c}{r_2}\right)^3\right). \quad \Rightarrow$$

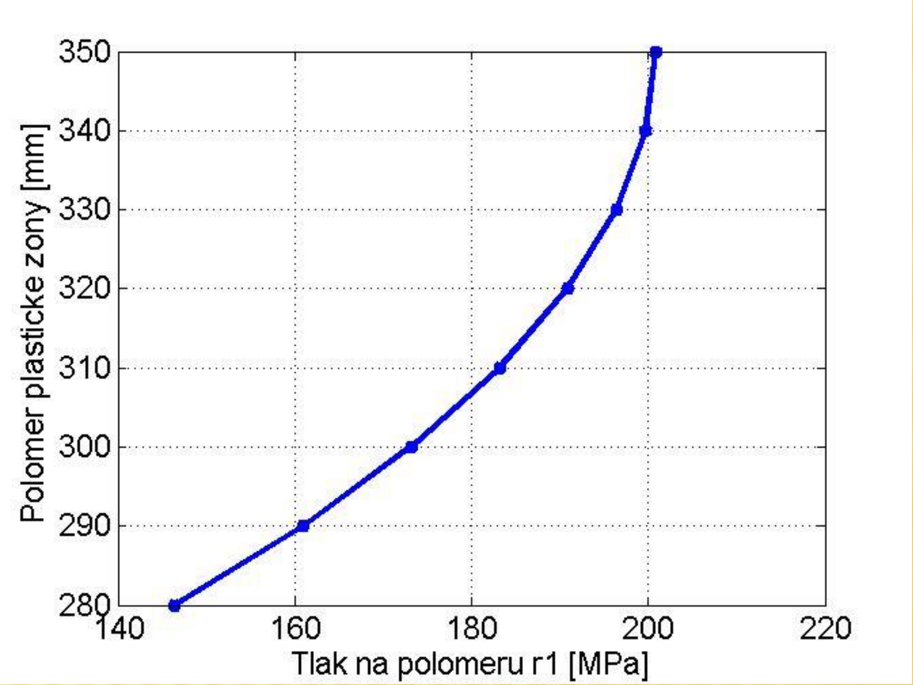
$$C = -\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{c}{r_2}\right)^3\right) - \ln\frac{c}{r_2}, \quad p_{ep} = 2\sigma_k \left(\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{c}{r_2}\right)^3\right) - \ln\frac{r_1}{c}\right).$$

Z posledního vztahu určíme vnitřní tlak v kulové nádobě, který je zapotřebí k tomu, aby se plastická oblast rozšířila od vnitřního okraje nádoby až k danému poloměru c. Opačná úloha tj. určit velikost plastické oblasti pro daný tlak, je obtížnější – poloměr plastické oblasti můžeme určit z grafu, nebo interpolací v tabulce hodnot c-$p_{ep}$.

Závislost mezi zatěžujícím vnitřním přetlakem a poloměrem plastické oblasti.

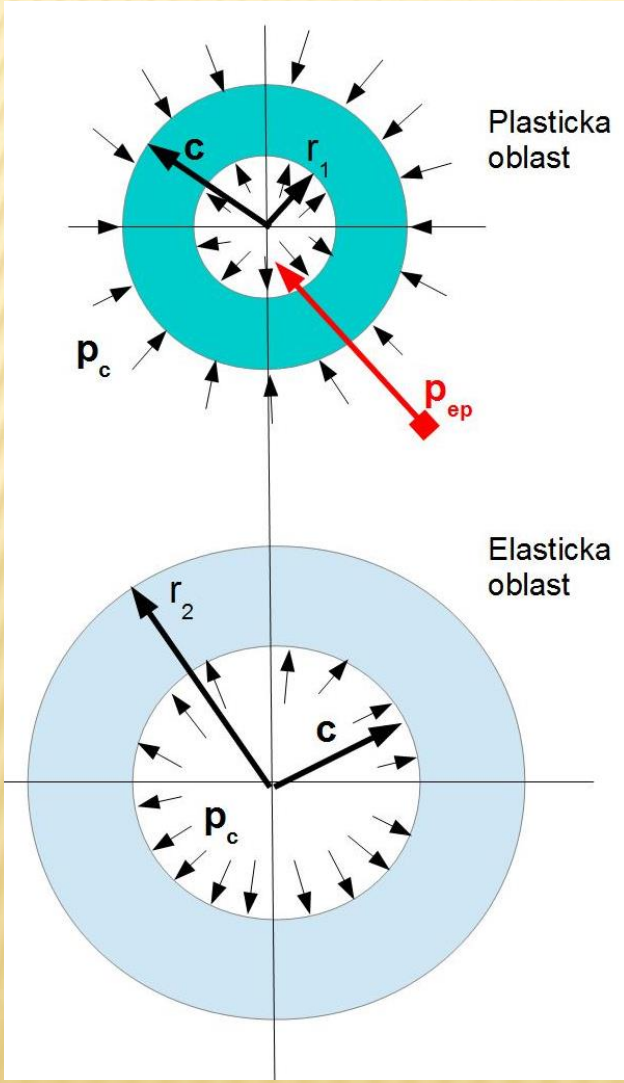
| C [mm] | 280 | 290 | 300 | 310 | 320 | 330 | 340 | 350 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{ep}$[Mpa] | 146 | 161 | 173 | 183 | 191 | 196 | 200 | 201 |




Tlak $p_{ep} = p_e$ =146 MPa, kdy je celý plášť v elastickém stavu a začíná plastický stav na vnitřním poloměru a $p_{ep} = p_M$ =201 MPa pro celý plášť v plastickém stavu.

Určíme napětí v případě, že plastická zóna se rozšířila až k poloměru c=300mm. Na vnitřním okraji pláště nádoby $r_1$ je tlak $p_{ep}$=173 MPa (viz graf), na poloměru c je tlak $p_c$=111MPa vnější okraj $r_2$ je nezatížený. Určíme zvlášť napětí v elastické a v plastické oblasti (v grafu na násl. stránce jsou tato napětí znázorněna modrou barvou).




Na vnitřním okraji elast. oblasti je tlak

$$p_c = \frac{2}{3}\sigma_k \left(1 - \left(\frac{c}{r_2}\right)^3\right) = 111\, MPa$$

Napětí v elastické oblasti $c \le r \le r_2$

$$\sigma_\theta = A + B\rho^{-3}, \sigma_r = A - 2B\rho^{-3},$$

kde $\rho = \dfrac{r}{r_2}$, okrajové podmínky:

$$\sigma_r(\rho_c) = -p_c, \quad \sigma_r(1) = 0 \quad \Rightarrow A = 189\ MPa,\ B = \frac{A}{2}.$$

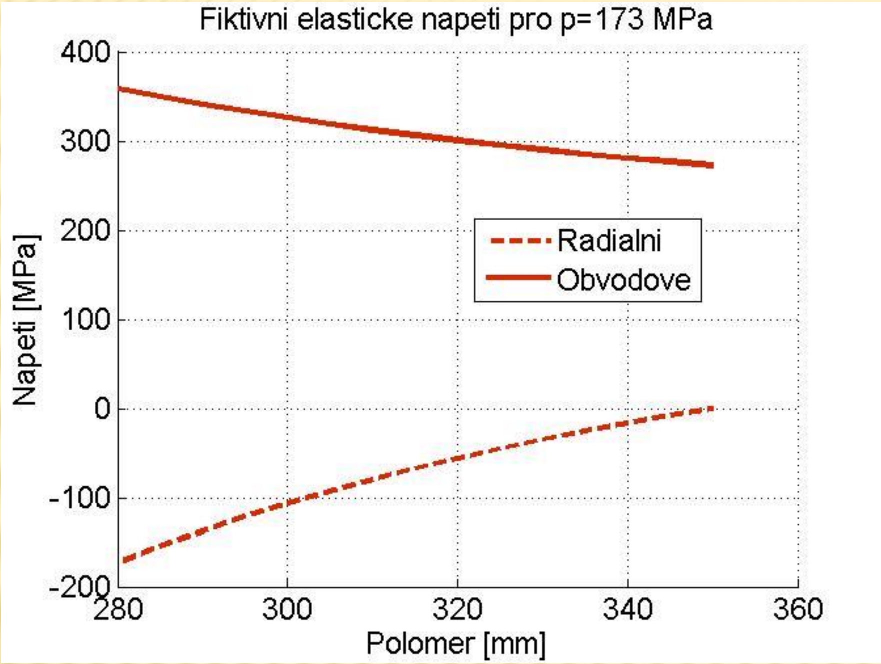
Napětí v plastické oblasti $r_1 \le r \le c$

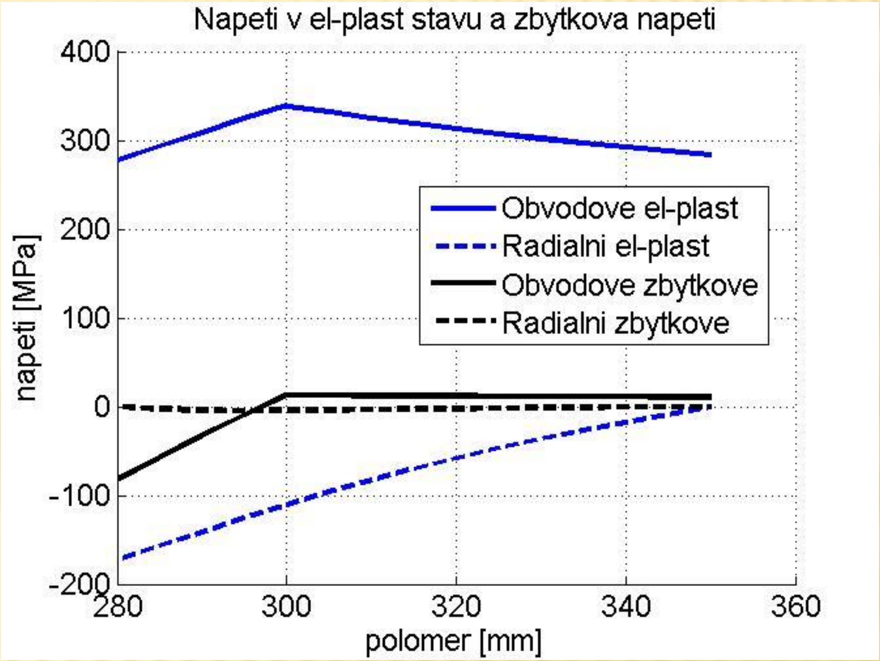
$$\sigma_r = 2\sigma_k(\ln\rho + C), \quad \sigma_\theta = \sigma_k + \sigma_r,\ \text{kde } \rho = \frac{r}{c}$$

Okrajová podmínka pro plastickou oblast:

$$\sigma_r(\rho_c = 1) = -p_c \quad \Rightarrow \quad C = -0{,}1234.$$

# KULOVÁ NÁDOBA V ELASTO-PLASTICKÉM STAVU A ZBYTKOVÁ NAPĚTÍ PO ODLEHČENÍ




Zatížíme-li nádobu vnitřním přetlakem $p_{ep}$=173 MPa, rozšíří se plastická zóna až k poloměru r=300 mm. Při tom budou v plášti nádoby napětí, která jsou znázorněná modrou barvou.
Odlehčení probíhá elasticky a po odlehčení zbudou v plášti zbytková napětí – znázorněná černou barvou. Vypočteme je tak, že od modrých napětí v el-plast stavu odečteme červená fiktivní elastická napětí, která by vznikla v plášti, kdyby byl elastický i při zatížení $p_{ep}$=173 MPa. Zbytkové radiální napětí je téměř nulové. Zbytkové obvodové napětí je velmi výhodně rozloženo – je tlakové na vnitřním poloměru a v jeho blízkosti. Při dalším zatížení se bude zbytkové obvodové napětí superponovat na napětí provozní a bude snižovat špičku tahového obvodového napětí na vnitřním poloměru.

# Kulová nádoba v elasto-plastickém stavu a zbytková napětí po odlehčení pokračování

- Zbytková napětí dostaneme, jestliže od napětí v elasto-plastickém stavu odečteme napětí, která by byla v plášti nádoby, kdyby se choval elasticky i při zatížení tlakem $p_{ep}$=173 MPa na vnitřním okraji. Tato „elastická fiktivní“ napětí jsou v grafu červená.

Fiktivní elastická napětí:

$$\sigma_\theta = A^* + B^* \rho^{-3}, \sigma_r = A^* - 2B^* \rho^{-3}, \text{ kde } \rho = \frac{r}{r_2},$$

Okrajové podmínky:

$$\sigma_r\left(\rho_1\right) = -p_{ep}, \quad \sigma_r\left(1\right) = 0 \quad \Rightarrow A^* = 182\ MPa, B^* = \frac{A^*}{2}.$$

# NÁDOBA SE ZBYTKOVÝMI NAPĚTÍMI PO AUTOFRETÁŽI – ZATÍŽENÍ PROVOZNÍM TLAKEM

V plášti nádoby jsou zbytková napětí (černé křivky). Zatížíme nyní nádobu provozním tlakem p=80 MPa (viz strana 5 prezentace). Provozní napětí (modré křivky) se sčítají se zbytkovými napětími – výsledná napětí jsou vyznačená červeně. Na pravém grafu je srovnáno výsledné ekvivalentní napětí s ekvivalentním napětím, které by bylo v plášti nádoby bez autofretáže. Vidíme, že rozložení napětí je výhodnější a že se nádoba přizpůsobila zatížení.