Jak pověsit žebřík

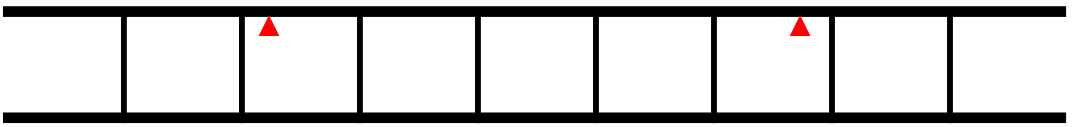
Úloha pro majitele žebříků

Tomáš Hruš, KMP FS TUL

Zadání

Žebřík obvykle skladujeme zavěšený na zdi na dvou skobách, jak je vidět na obrázku.

Out[3]=

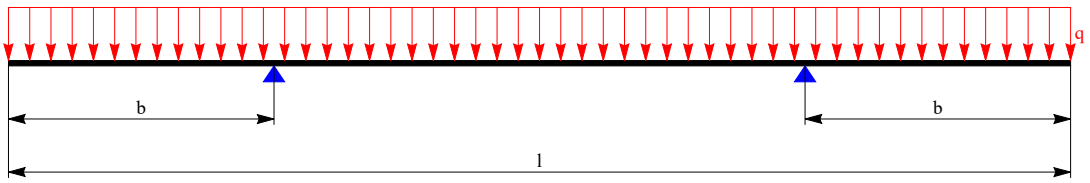


Je samozřejmě žádoucí umístit skoby tak, aby se během let žebřík co nejméně zohýbal. Ohýbat se bude tím víc, čím větší v něm budou ohybové momenty. Pokusíme se proto najít polohu skob, která zajistí co nejmenší ohybové momenty v zavěšeném žebříku.

Idealizace

Žebřík si můžeme představit jako nosník zatížený vlastní tíhou (kterou znázorníme konstantním spojitým zatížením) a uložený na dvou podporách. Poloha podpor je dána vzdáleností b. Tato vzdálenost je naše neznámá. Budeme hledat takovou hodnotu b, aby ohybové momenty v nosníku byly co nejmenší.

Out[4]=

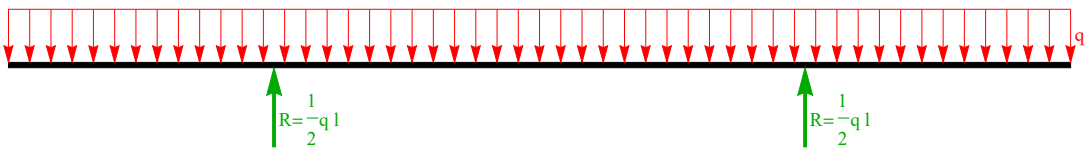


Rovnováha

Velikost reakcí je shodná, každá nese právě polovinu tíhy celého nosníku, takže můžeme napsat $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} q\, l$.

In[5]:=
```
R = 1/2 q l;
```

Out[6]=



Vnitřní statické účinky

Nosník rozdělíme na tři úseky.

Protože je nosník symetricky zatížený i uložený, bude i průběh ohybového momentu symetrický.

Velikosti vnitřních statických účinků jsou (předpokládám, že osa x míří zleva doprava a má počátek na levém konci nosníku)

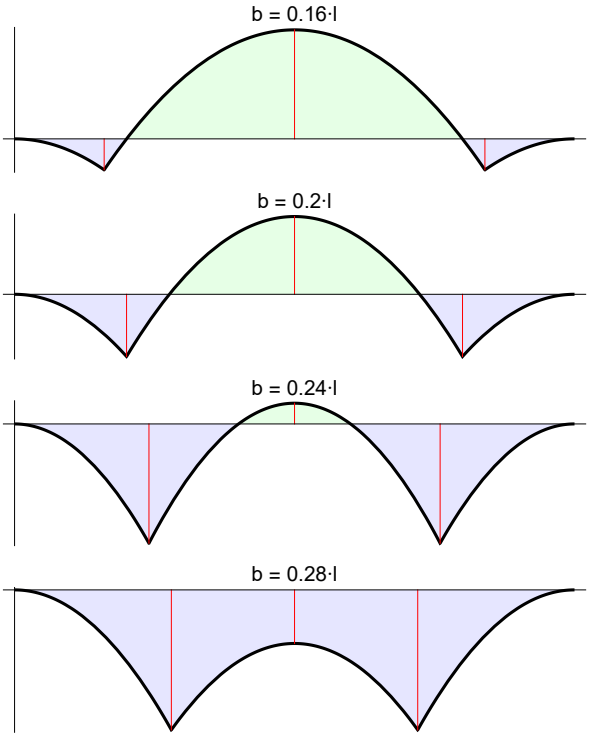
In[7]:=
$$T = \begin{cases} -q\,x & 0 \le x < b \\ -q\,x + R & b \le x < l - b \\ -q\,x + 2\,R & l - b \le x \le l \end{cases};$$

$$M = \begin{cases} -\frac{1}{2} q\,x^2 & 0 \le x < b \\ -\frac{1}{2} q\,x^2 + R\,(x - b) & b \le x < l - b \\ -\frac{1}{2} q\,x^2 + R\,(x - b) + R\,(x - (l - b)) & l - b \le x \le l \end{cases}$$

Hledání optimální velikosti b

Zakresleme si nyní graf ohybového momentu. A protože zatím neznáme správnou hodnotu b, vykreslíme si několik grafů pro různé hodnoty b. Červenými čarami jsou v grafech označené lokální extrémy. Žebříku je samozřejmě jedno, jestli ho ohýbá kladný nebo záporný monent, musíme proto posuzovat i minimální hodnoty.

Out[9]=



Pohled na grafy ukazuje následující závěry:

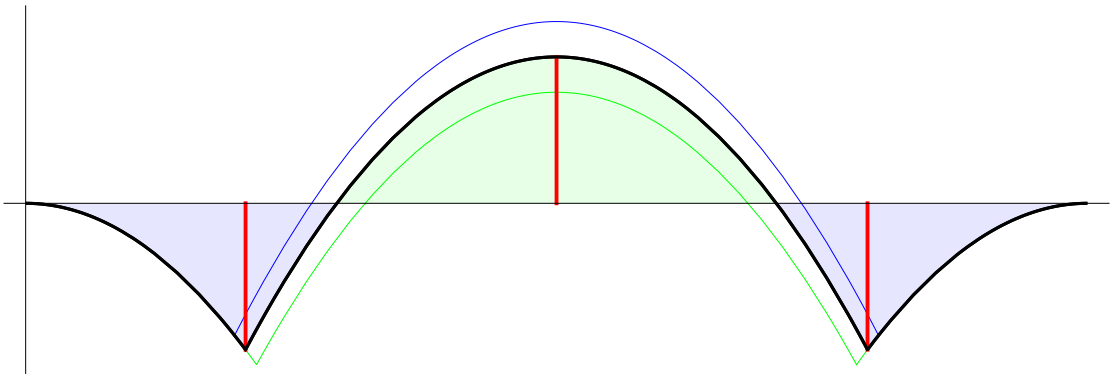
- pro malé b je maximum momentu uprostřed nosníku (vidíme to na prvním grafu)
- pro velké b bude největší velikost momentu v místě podpory (vidíme např. na třetím grafu)

Stanovení optimální hodnoty b

Na následujícím grafu je černou čarou vyznačen průběh momentu pro nějakou (zatím neznámou) hodnotu b, která způsobí, že velikosti ohybových momentů v místě podpory a uprostřed (červené čáry) jsou shodné.

Tenkou zelenou čarou je nakreslen graf, kde b je trochu větší a tenkou modrou naopak graf, kde b je o něco menší.

Out[10]=



Můžeme si všimnout, že když b zvětšíme, naroste hodntota max. momentu v místech podpor. Situace se tedy zhorší. Když b zmenšíme, naroste naopak hodnota momentu uprostřed - a situace se také zhorší. Pokud tedy jakákoli změna hodnoty b způsobí nárůst zatížení nosníku, má b hodnotu optimální.

Optimální hodnota b je tady taková, která zajistí, že velikost momentu v podpoře je stejná, jako velikost momentu uprostřed nosníku.

Zapišme velikosti momentů v místě podpory a uprostřed.

In[11]:=
```
Mp = -1/2 q b^2;
Ms = -1/2 q (l/2)^2 + R (l/2 - b);
```

Položme jejich velikosti sobě rovné. Nesmíme zapomenout, že Mp je záporný a jeho velikost je -Mp.

Dostaneme rovnici pro neznámou b

In[13]:=
```
rovnice = -Mp == Ms
```

Out[13]=
$$\frac{b^2\,q}{2} == \frac{1}{2}\left(-b+\frac{l}{2}\right) l\,q - \frac{l^2\,q}{8}$$

a tuto rovnici vyřešíme

In[14]:=
```
reseni = Solve[rovnice, b] // Simplify
```

Out[14]=
$$\left\{\left\{b \to -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right) l\right\}, \left\{b \to \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right) l\right\}\right\}$$

Řešení jsou dvě (jde o kvadratickou rovnici). Vybereme z nich to kladné:

In[15]:=
```
b = Select[(b/l /. reseni // Simplify), (# > 0) &][[1]] l
```

Out[15]=
$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) l$$

Závěr

Optimální velikost b je

In[16]:=
```
N[b]
```

Out[16]=
```
0.207107 l
```

Out[17]=

