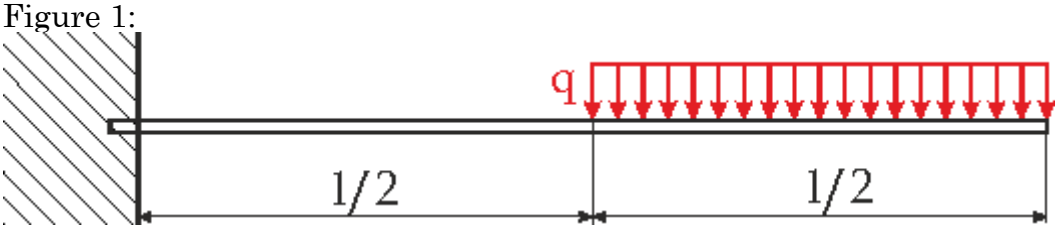
```
(%i1) kill(all)$;
```

1 Vetknutý nosník částečně zatížený spojitým zatížením

1.1 Zadání

Figure 1:



Zatížení, rozměry, materiál, atd...
Předpokládám nosník kruhového průřezu s průměrem D. Nosník je z oceli.

```
(%i1) cisla:[q=10, l=1.5, E=2.1*10^11, D=0.010, J=%pi * 0.010^4 / 64]$;
```

1.2 Řešení

1.2.1 Rozdělení nosníku na úseky, zavedení souřadnice

Zvedu si souřadnici x od volného (pravého) konce a definuji si oba dva úseky na nosníku.

Pravý úsek označím jako I, levý interval jako II

```
(%i3) usek_I:((x>=0) and (x < l/2))$;
      usek_II:(x>=l/2 and (x<=l))$;
```

1.2.2 Vnitřní statické účinky - vztahy a grafy

Ohybový moment v prvním a druhém úseku pomocí metody řezu.
Posouvající sílu dostanu pomocí Schwedlerovy věty jako derivaci momentu.
Protože x míří zprava, musím použít Schwedlerovu větu zprava

```
(%i7) M_I: -1/2 * q * x^2$;
      M_II: -q * l/2 * (x-l/4)$;

      T_I: -diff(M_I,x)$;
      T_II: -diff(M_II,x)$;
```

Moment má na každém úseku jinou definici (M_I a M_II), já teď obě definice spojím
do jediné definice veličiny M a totéž udělám s posouvající silou T

(%i9) M: (if usek_I then M_I elseif usek_II then M_II);
T: (if usek_I then T_I elseif usek_II then T_II);

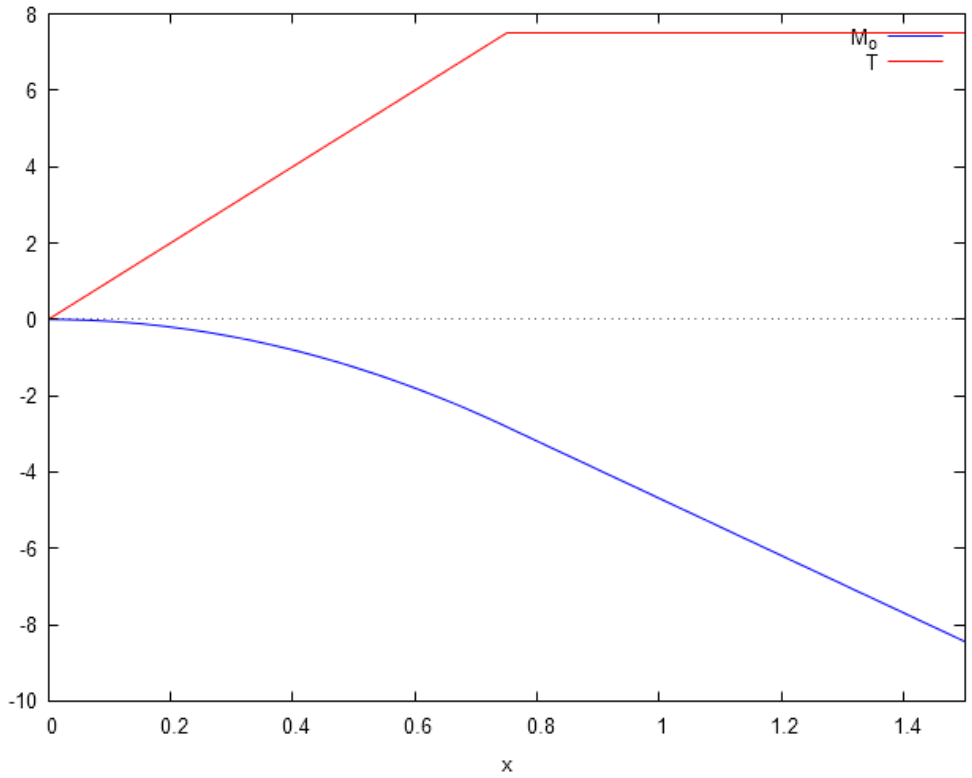
(M) $$\text{if } x>=0 \text{ and } x<\frac{l}{2} \text{ then } -\frac{q\,x^2}{2} \text{ elseif } x>=\frac{l}{2} \text{ and } x<=l \text{ then } -\frac{l\,q\left(x-\frac{l}{4}\right)}{2}$$

(T) $$\text{if } x>=0 \text{ and } x<\frac{l}{2} \text{ then } q\,x \text{ elseif } x>=\frac{l}{2} \text{ and } x<=l \text{ then } \frac{l\,q}{2}$$

Vykreslení průběhu momentu a posouvající síly.

(%i10) wxplot2d(ev([M,T], cisla), [x,0,ev(l, cisla)], [legend, "M_o","T"]);

(%t10)

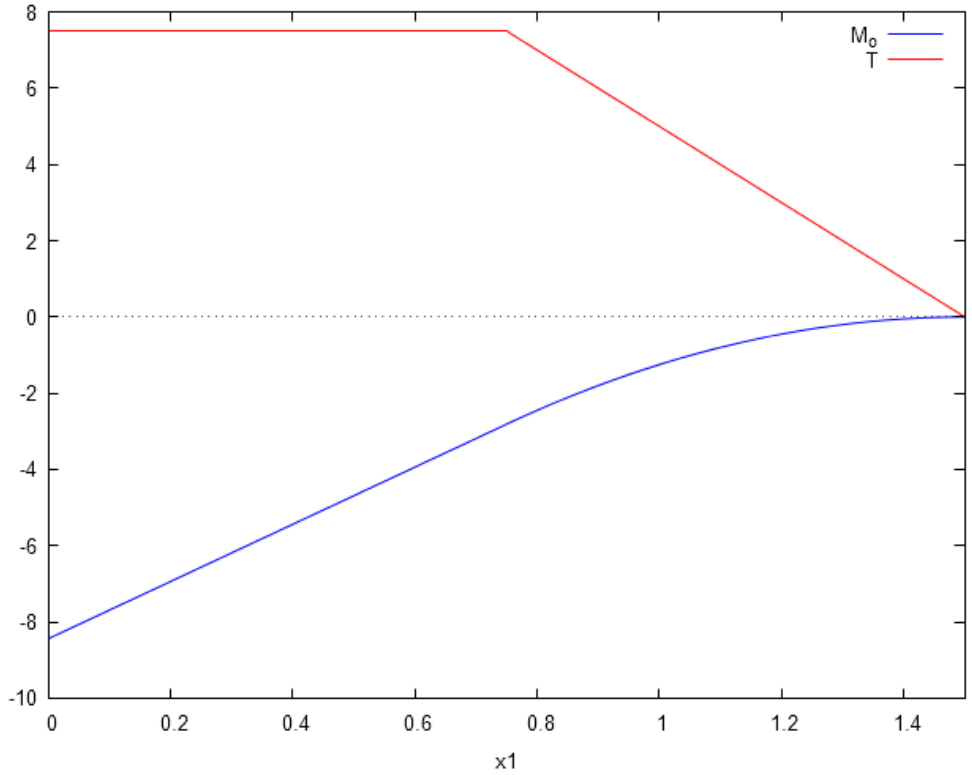


(%o10)

Protože ve skutečnosti máme x zprava a Maxima nám (podle očekávání) vykreslí graf s x zleva,
musíme si s tím nějak poradit.
Můžeme to udělat například tak, že si zavedeme souřadnici x1, měřenou zleva.
Každý bod nosníku má tedy souřadnici x měřenou zprava a souřadnici x1 měřenou zleva a platí x+x1=l.
Takže x=l-x1.
Postačí tedy za x dosadit (l-x1) a dostaneme vztahy pro moment a posuvající sílu vyjádřené pomocí x1 měřeného zleva. Tyto vztahy poslouží pro vykreslení grafu:

(%i11) wxplot2d(ev([M,T], cisla, x=ev(l, cisla)-x1), [x1,0,ev(l, cisla)], [legend, "M_o","T"]);

(%t11)



(%o11)

1.2.3 Průhybová čára

Zapíšu diferenciální rovnici průhybové čáry pro první i pro druhý úsek

```
(%i13) dr1:'diff(w_I,x,2)=-M_I/(E * J);
       dr2:'diff(w_II,x,2)=-M_II/(E * J);
```

(dr1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,w_I = \frac{q\,x^2}{2\,E\,J}$$

(dr2) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,w_{II} = \frac{l\,q\left(x-\frac{l}{4}\right)}{2\,E\,J}$$

Příkazem ode2 každou rovnici vyřeším

```
(%i15) reseni_I:ode2(dr1, w_I ,x);
       reseni_II:ode2(dr2, w_II ,x);
```

(reseni_I) $$w_I = \frac{q\,x^4}{24\,E\,J} + \%k2\,x + \%k1$$

(reseni_II) $$w_{II} = \frac{4\,l\,q\,x^3 - 3\,l^2\,q\,x^2}{48\,E\,J} + \%k2\,x + \%k1$$

Ve skutečnosti integrační konstanta %k1 z prvního řešení není totéž jako %k1 z druhého řešení. Podobně %k2 z obou řešení také nsjou shodné.

Jako průhybovou čáru v prvním úseku vezmu tedy pravou stranu (příkaz rhs) řešení v prvním úseku a zároveň konstanty %k1 a %k2 přejmenuji na C1, C2. Totéž udělám se druhým úsekem, kde konstanty přejmenuji na C3 a C4. Vypočítám také sklony jako derivace průhybových čar. Protože x je zprava, musím před derivaci doplnit znaménko mínus.

```
(%i19) w_I:ev(rhs(reseni_I), %k1=C1, %k2=C2);
       w_II:ev(rhs(reseni_II),%k1=C3, %k2=C4);

       fi_I:-diff(w_I, x);
       fi_II:-diff(w_II,x);
```

(w_I) $$\frac{q\,x^4}{24\,E\,J}+C2\,x+C1$$

(w_II) $$\frac{4\,l\,q\,x^3-3\,l^2\,q\,x^2}{48\,E\,J}+C4\,x+C3$$

(fi_I) $$-\frac{q\,x^3}{6\,E\,J}-C2$$

(fi_II) $$-\frac{12\,l\,q\,x^2-6\,l^2\,q\,x}{48\,E\,J}-C4$$

Zapíšu si všechny okrajové a přechodové podmínky:
- shodný průhyb prvního a druhého úseku na souřadnici x=l/2
- shodný sklon prvního a druhého úseku na souřadnici x=l/2
- nulový průhyb úseku II na souřadnici x=l (ve vetknutí)
- nulový sklon úseku II na souřadnici x=l (ve vetknutí)

```
(%i23) op1:ev(w_I,x=l/2) = ev(w_II,x=l/2);
       op2:ev(fi_I,x=l/2) = ev(fi_II,x=l/2);
       op3:ev(w_II,x=l) = 0;
       op4:ev(fi_II,x=l) = 0;
```

(op1) $$\frac{l^4\,q}{384\,E\,J}+\frac{C2\,l}{2}+C1=-\frac{l^4\,q}{192\,E\,J}+\frac{C4\,l}{2}+C3$$

(op2) $$-\frac{l^3\,q}{48\,E\,J}-C2=-C4$$

(op3) $$\frac{l^4\,q}{48\,E\,J}+C4\,l+C3=0$$

(op4) $$-\frac{l^3\,q}{8\,E\,J}-C4=0$$

Okrajové podmínky tvoří soustavu rovnic, z níž vyřešíme hodnoty konstant....

```
(%i24) konstanty:solve([op1,op2,op3,op4],[C1,C2,C3,C4])[1];
```

(konstanty) $$\left[C1=\frac{41\,l^4\,q}{384\,E\,J},\,C2=-\frac{7\,l^3\,q}{48\,E\,J},\,C3=\frac{5\,l^4\,q}{48\,E\,J},\,C4=-\frac{l^3\,q}{8\,E\,J}\right]$$

...a ty dosadíme do vztahů pro průhyby a sklony

```
(%i28) w_I:ev(w_I, konstanty);
       w_II:ev(w_II, konstanty);

       fi_I:ev(fi_I, konstanty);
       fi_II:ev(fi_II, konstanty);
```

(w_I) $$\frac{q\,x^4}{24\,E\,J}-\frac{7\,l^3\,q\,x}{48\,E\,J}+\frac{41\,l^4\,q}{384\,E\,J}$$

(w_II) $$\frac{4\,l\,q\,x^3-3\,l^2\,q\,x^2}{48\,E\,J}-\frac{l^3\,q\,x}{8\,E\,J}+\frac{5\,l^4\,q}{48\,E\,J}$$

(fi_I) $$\frac{7\,l^3\,q}{48\,E\,J}-\frac{q\,x^3}{6\,E\,J}$$

(fi_II) $$\frac{l^3\,q}{8\,E\,J}-\frac{12\,l\,q\,x^2-6\,l^2\,q\,x}{48\,E\,J}$$

Protože máme průhyb a sklon definován ve dvou úsecích, musíme je sloučit podobně, jako jsme to udělali s momentem a posouvající silou

```
(%i30) w:(if usek_I then w_I elseif usek_II then w_II);
       fi:(if usek_I then fi_I elseif usek_II then fi_II);
```

(w) $$\text{if } x>=0 \text{ and } x<\frac{l}{2} \text{ then } \frac{q\,x^4}{24\,E\,J}-\frac{7\,l^3\,q\,x}{48\,E\,J}+\frac{41\,l^4\,q}{384\,E\,J} \text{ elseif } x>=\frac{l}{2} \text{ and } x<=l \text{ then } \frac{4\,l\,q\,x^3-3\,l^2\,q\,x^2}{48\,E\,J}-\frac{l^3\,q\,x}{8\,E\,J}+\frac{5\,l^4\,q}{48\,E\,J}$$

(fi) $$\text{if } x>=0 \text{ and } x<\frac{l}{2} \text{ then } \frac{7\,l^3\,q}{48\,E\,J}-\frac{q\,x^3}{6\,E\,J} \text{ elseif } x>=\frac{l}{2} \text{ and } x<=l \text{ then } \frac{l^3\,q}{8\,E\,J}-\frac{12\,l\,q\,x^2-6\,l^2\,q\,x}{48\,E\,J}$$

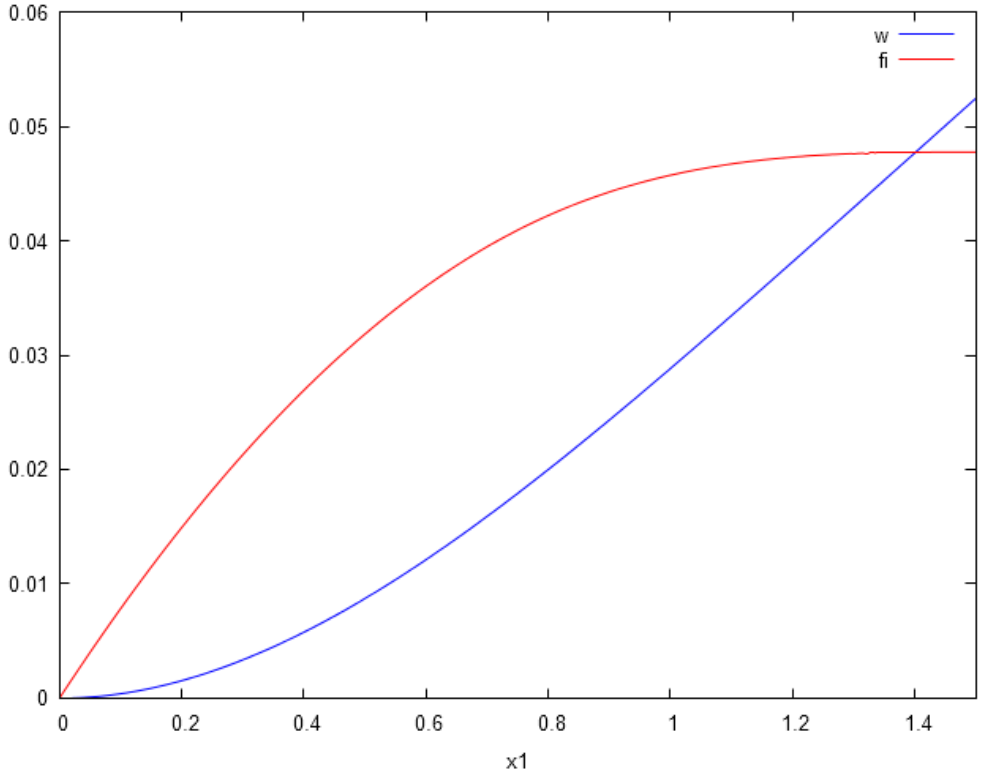
Pro účely vykreslení grafu dosadím do vztahů čísla

```
(%i31) grafy:ev([w, fi],cisla)$;
```

...a nakonec vykreslím grafy s pomocí už jednou použitého fíglu se souřadnicí x1 zleva

```
(%i32) wxplot2d(ev(grafy, x=ev(l, cisla)-x1), [x1,0,ev(l, cisla)], [legend, "w","fi"] );
```

(%t32)



(%o32)

Spočítáme ještě průhyb a sklon na konci.Průhyb bude v milimetrech, sklon ve stupních

(%i33) `float(ev([w*1000,fi*180/%pi],cisla,x=0));`

(%o33) [52.43586964366909, 2.73567195834312]

Created with wxMaxima.