Tuhost hustě vinuté válcové pružiny (pomocí Castiglianovy věty)

Z PP1 víme, že drát hustě vinuté válcové pružiny je namáhám především krutem

In[1]:=
$$M = \frac{F\,D}{2};$$

Deformační energii získáme integrací hustoty deformační energie přes celou délku pružiny, která má pro z závitů velikost $z \cdot \pi \cdot D$.

In[2]:=
$$U = \int_0^{z\,\pi\,D} \frac{M^2}{2\,G\,Jp}\,dl$$

Out[2]=
$$\frac{F^2\,\pi\,z\,D^3}{8\,G\,Jp}$$

Posuv působiště síly F ve směru osy pružiny je změna délky pružiny Δ a dostaneme ho jako derivaci deformační energie U podle sílu F. Za Jp pak dosadíme polární kvadratický moment $\frac{\pi d^4}{32}$.

In[4]:=
$$\Delta = D[U, F] /. Jp \to \frac{\pi\,d^4}{32}$$

Out[4]=
$$\frac{8\,F\,z\,D^3}{d^4\,G}$$

Pro pružinu platí známý vstah $\Delta = \frac{F}{K}$, takže tuhost pružiny k vychází

In[5]:=
$$k = \frac{F}{\Delta}$$

Out[5]=
$$\frac{d^4\,G}{8\,z\,D^3}$$