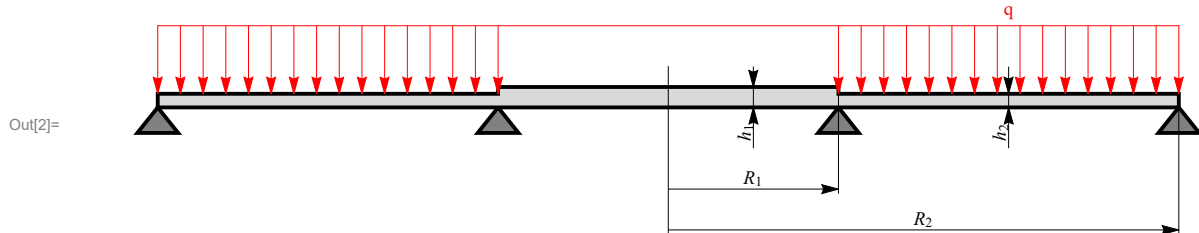


```
In[1]:= ClearAll["Global`*"]
```

Staticky neurčitá kruhová deska

Deska je zatížena a uložena podle obrázku

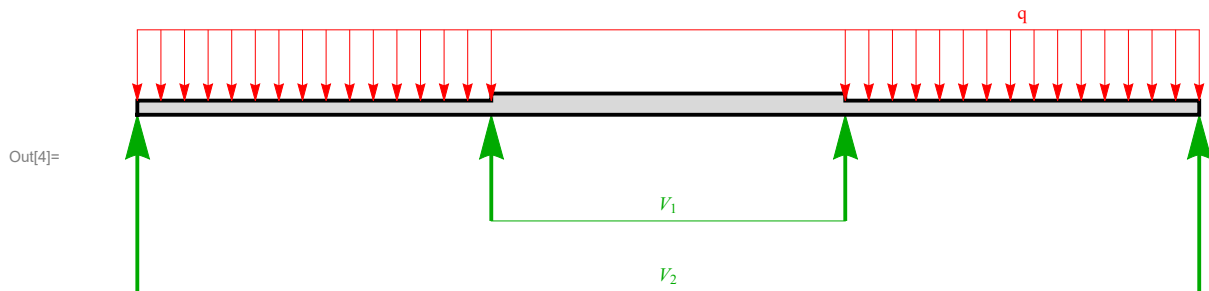
Určíme deformace desky a napětí v desce.



Zvolme si nějaká čísla (všechno v základních jednotkách)

```
In[3]:= císla = {R1 -> 0.6, R2 -> 1, h1 -> 0.002, h2 -> 0.001, q -> 1500 (* N/m^2 *), E -> 2.1 * 10^11, mu -> 0.3};
```

Desku uvolníme a zakreslíme si reakce



Můžeme napsat jedinou rovnici rovnováhy desky. Protože se v ní vyskytují dvě reakce (V_1 a V_2), je deska staticky neurčitě uložena.

```
In[5]:= rr = V1 + V2 - q pi (R2^2 - R1^2) == 0;
```

Definujme si pravé strany diferenciálních rovnic pro vnitřní a vnější část desky.

```
In[6]:= DI = (E h1^3) / (12 (1 - mu^2));
```

```
DI = (E h2^3) / (12 (1 - mu^2));
```

```
In[8]:= QI = 0;
```

```
PSI = (QI) / (DI) (* Pravá strana rovnice pro vnitřní část desky *)
```

```
QII = (-V1 + q pi (x^2 - R1^2)) / (2 pi x);
```

```
PSII = -(QII) / (DII) (* Pravá strana rovnice pro vnější část desky *)
```

Out[9]= 0

```
Out[11]= - (6 (1 - mu^2) (pi q (x^2 - R1^2) - V1)) / (pi x E h2^3)
```

Pravá strana dif. rovnice pro vnější část desky se skládá z členu lineárně závislého na x a z členu závislého na x hyperbolicky. Uložíme si konstanty, kterým se x^1 a x^{-1} násobí:

```
In[12]:= A = Coefficient[PSII, x, 1]
B = Coefficient[PSII, x, -1]
```

$$\text{Out[12]} = -\frac{6 q (1 - \mu^2)}{\mathbb{E} h_2^3}$$

$$\text{Out[13]} = -\frac{6 (1 - \mu^2) (-\pi q R_1^2 - V_1)}{\pi \mathbb{E} h_2^3}$$

Pravou stranu pak můžeme zapsat takto

```
In[14]:= PSII = A x + B \frac{1}{x};
```

a řešení sklonu φ pak snadno určíme, protože známe homogenní řešení i partikulární řešení pro oba členy na pravé straně druhé dif. rovnice:

```
In[15]:= \varphi_I = C_1 x + \frac{C_2}{x};
\varphi_{II} = \frac{1}{8} A x^3 + B \left( \frac{x}{2} \text{Log}[x] - \frac{x}{4} \right) + C_3 x + \frac{C_4}{4};
```

Zde jsou vztahy pro radiální a tečné napětí na dolní ploše desky

```
In[17]:= \sigma_{rI} = \frac{\mathbb{E} h_1}{2 (1 - \mu^2)} \left( D[\varphi_I, x] + \mu \frac{\varphi_I}{x} \right);
\sigma_{tI} = \frac{\mathbb{E} h_1}{2 (1 - \mu^2)} \left( \frac{\varphi_I}{x} + \mu D[\varphi_I, x] \right);
\sigma_{rII} = \frac{\mathbb{E} h_2}{2 (1 - \mu^2)} \left( D[\varphi_{II}, x] + \mu \frac{\varphi_{II}}{x} \right);
\sigma_{tII} = \frac{\mathbb{E} h_2}{2 (1 - \mu^2)} \left( \frac{\varphi_{II}}{x} + \mu D[\varphi_{II}, x] \right);
```

Pro desku platí, že uprostřed bude $\varphi = 0$, proto bude platit $C_2 = 0$. Na poloměru R_1 pak bude mít vnější i vnitřní část desky stejný sklon. Poměr radiálních napětí na poloměru R_1 je roven poměru druhých mocnin tloušťek desky. Na vnějším okraji je radiální napětí nulové.

```
In[21]:= okrajovePodminky1 = {
C_2 == 0,
(\varphi_I == \varphi_{II}) /. x -> R_1,
(\sigma_{rI} h_1^2 == \sigma_{rII} h_2^2) /. x -> R_1,
(\sigma_{rII} == 0) /. x -> R_2
};
```

Tato sada okrajových podmínek by nám sice umožnila stanovit konstanty C_1 až C_4 , všechny by ale závisely na (dosud neznámé) reakci V_1 . Podívejme se, jak by nám vyšla například konstanta C_1 :

```
In[22]:= Solve[okrajovePodminky1, {C_1, C_2, C_3, C_4}][[1]][[1]] // Simplify
```

$$\text{Out[22]} = C_1 \rightarrow -\left(\left(3 (-1 + \mu) \left(2 \pi q \mu R_1^3 - \pi q (-3 + \mu + 4 (1 + \mu) \text{Log}[R_1] - 4 (1 + \mu) \text{Log}[R_2]) R_1^2 R_2 + 4 \mu R_1 V_1 - R_2 \left(\pi q (3 + \mu) R_2^2 + 4 (\mu + (1 + \mu) \text{Log}[R_1] - (1 + \mu) \text{Log}[R_2]) V_1 \right) \right) \right) / \left(4 \pi \mathbb{E} (\mu h_2^3 (-R_1 + R_2) + h_1^3 (\mu R_1 - (1 + \mu) R_2)) \right) \right)$$

Proto konstanty zatím řešit nebudeme a postoupíme přímo k výpočtu průhybu. Pro něj platí tyto vztahy

```
In[23]:= w_I = \int \varphi_I dx + C_5
w_{II} = \int \varphi_{II} dx + C_6
```

$$\text{Out[23]} = \frac{x^2 C_1}{2} + \text{Log}[x] C_2 + C_5$$

$$\text{Out[24]} = C_6 + \frac{1}{16} x \left(8 x C_3 + 4 C_4 + \frac{1}{\pi \mathbb{E} h_2^3} 3 x (-1 + \mu^2) (\pi q x^2 - 8 \pi q (-1 + \text{Log}[x]) R_1^2 - 8 (-1 + \text{Log}[x]) V_1) \right)$$

Pro průhyb platí tyto tři okrajové podmínky:

```
In[25]:= okrajovePodminky2 = {
      (wI == 0) /. x -> R1,
      (wII == 0) /. x -> R1,
      (wII == 0) /. x -> R2
    };
```

Nyní máme k dispozici celkem 7 okrajových podmínek pro šest konstant C_i a reakci V_1 . Můžeme je proto vyřešit.

```
In[26]:= reseni = Solve[Join[okrajovePodminky1, okrajovePodminky2], {C1, C2, C3, C4, C5, C6, V1}][[1]] //
      Simplify;
```

a pak můžeme vyčíslit průběh sklonu, průhybu i napětí

```
In[27]:= phi = { phiI  0 <= x <= R1
               phiII R1 < x <= R2 } /. reseni /. cisla // Simplify
```

```
Out[27]:= { -0.0849041 x                                0 <= x <= 0.6
            10.3234 - 5.34819 x - 4.875 x^3 + 19.9431 x Log[x] 0.6 < x <= 1
            0                                                  True
```

```
In[28]:= W = { wI  0 <= x <= R1
               wII R1 < x <= R2 } /. reseni /. cisla // Simplify
```

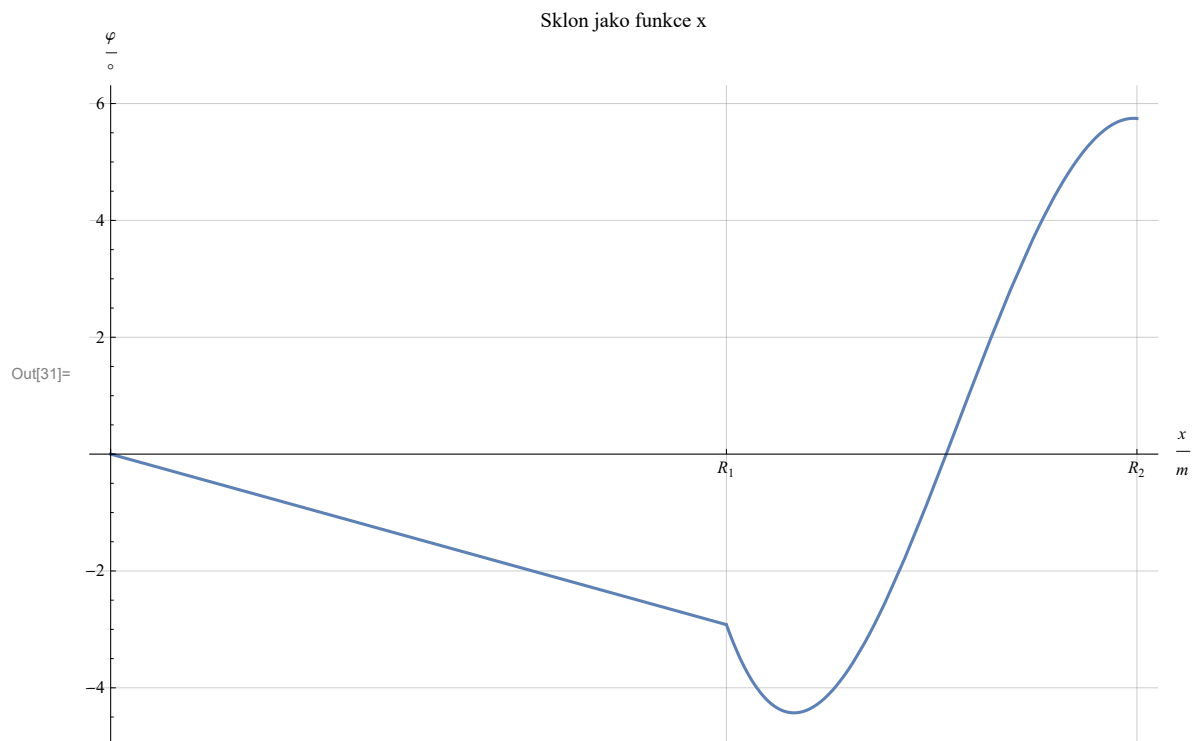
```
Out[28]:= { 0.0152827 - 0.0424521 x^2                    0 <= x <= 0.6
            -1.44482 + 10.3234 x - 7.65988 x^2 - 1.21875 x^4 + 9.97156 x^2 Log[x] 0.6 < x <= 1
            0                                                  True
```

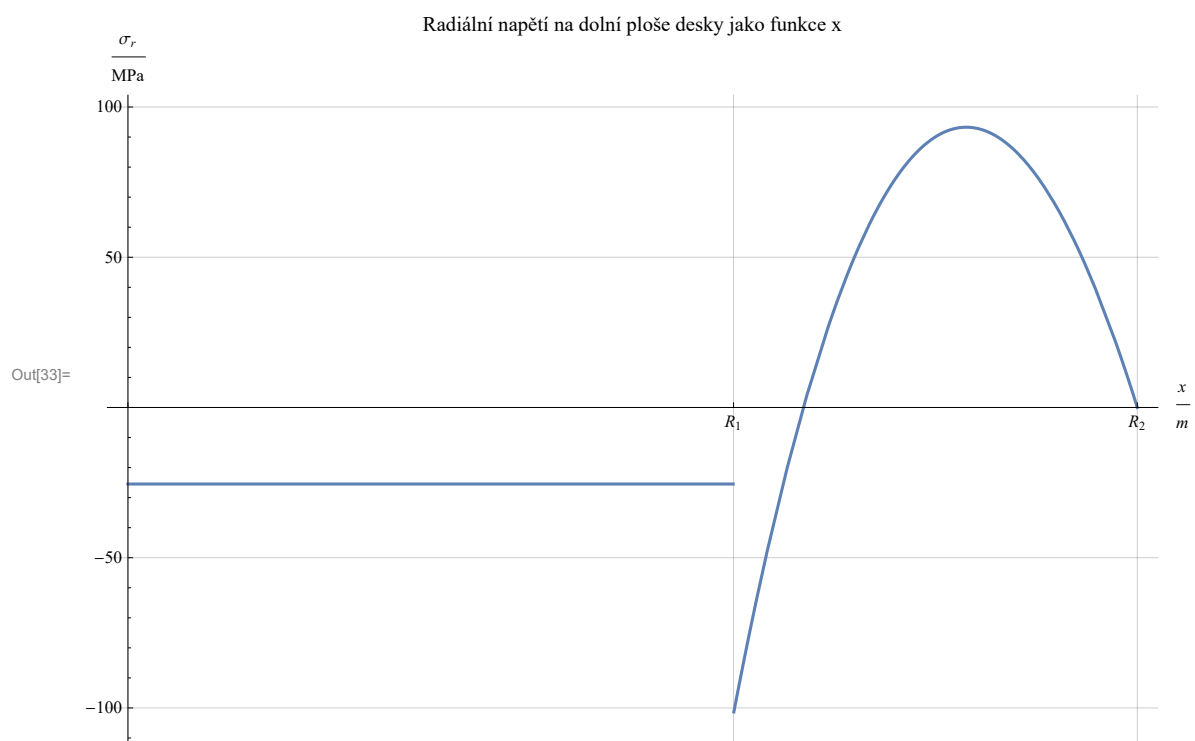
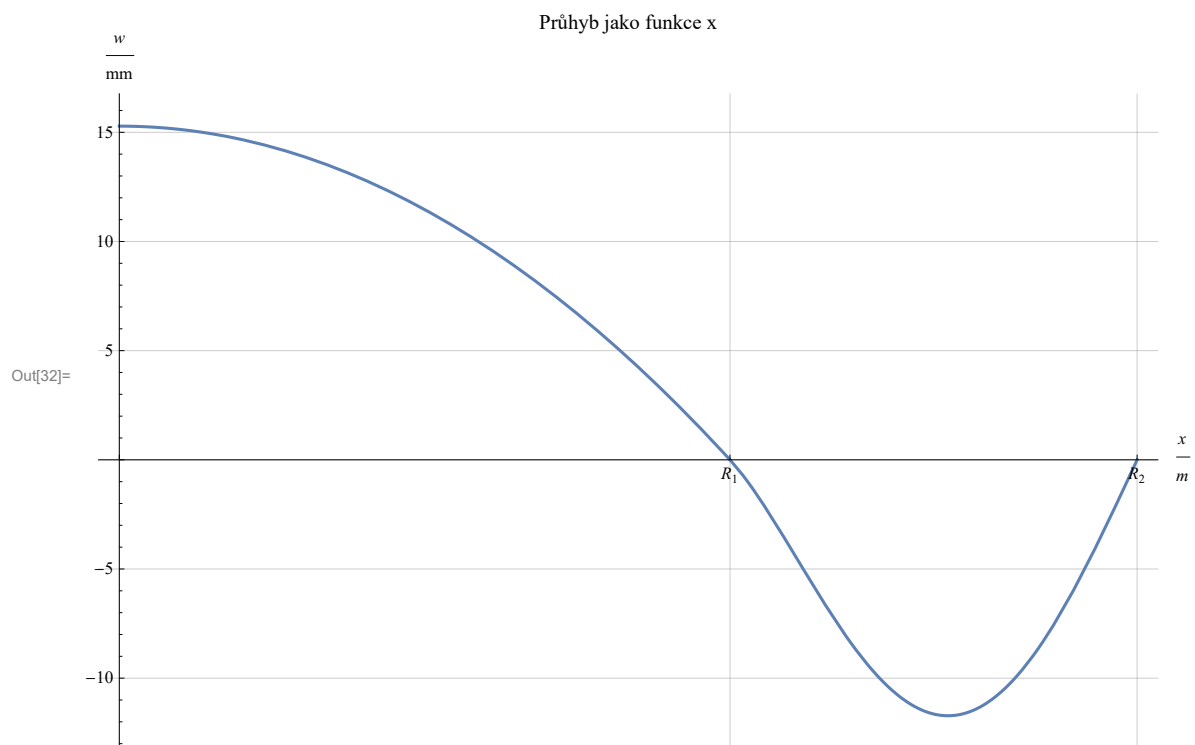
```
In[29]:= sigma_r = { sigma_rI  0 <= x <= R1
                    sigma_rII R1 < x <= R2 } /. reseni /. cisla // Simplify
```

```
Out[29]:= { -2.54712 x 10^7                                0 <= x <= 0.6
            1.4989 x 10^9 + (3.5735 x 10^8)/x - 1.85625 x 10^9 x^2 + 2.99147 x 10^9 Log[x] 0.6 < x <= 1
            0                                                  True
```

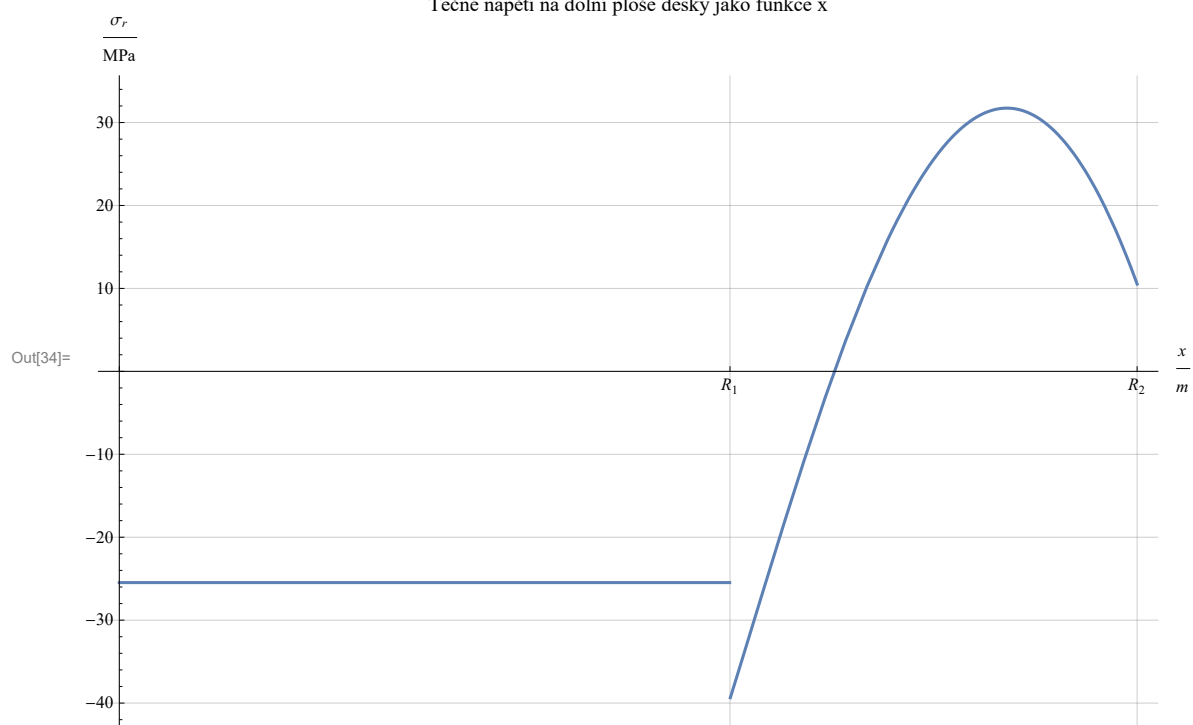
```
In[30]:= sigma_t = { sigma_tI  0 <= x <= R1
                    sigma_tII R1 < x <= R2 } /. reseni /. cisla // Simplify
```

```
Out[30]:= { -2.54712 x 10^7                                0 <= x <= 0.6
            -1.1189 x 10^8 + (1.19117 x 10^9)/x - 1.06875 x 10^9 x^2 + 2.99147 x 10^9 Log[x] 0.6 < x <= 1
            0                                                  True
```

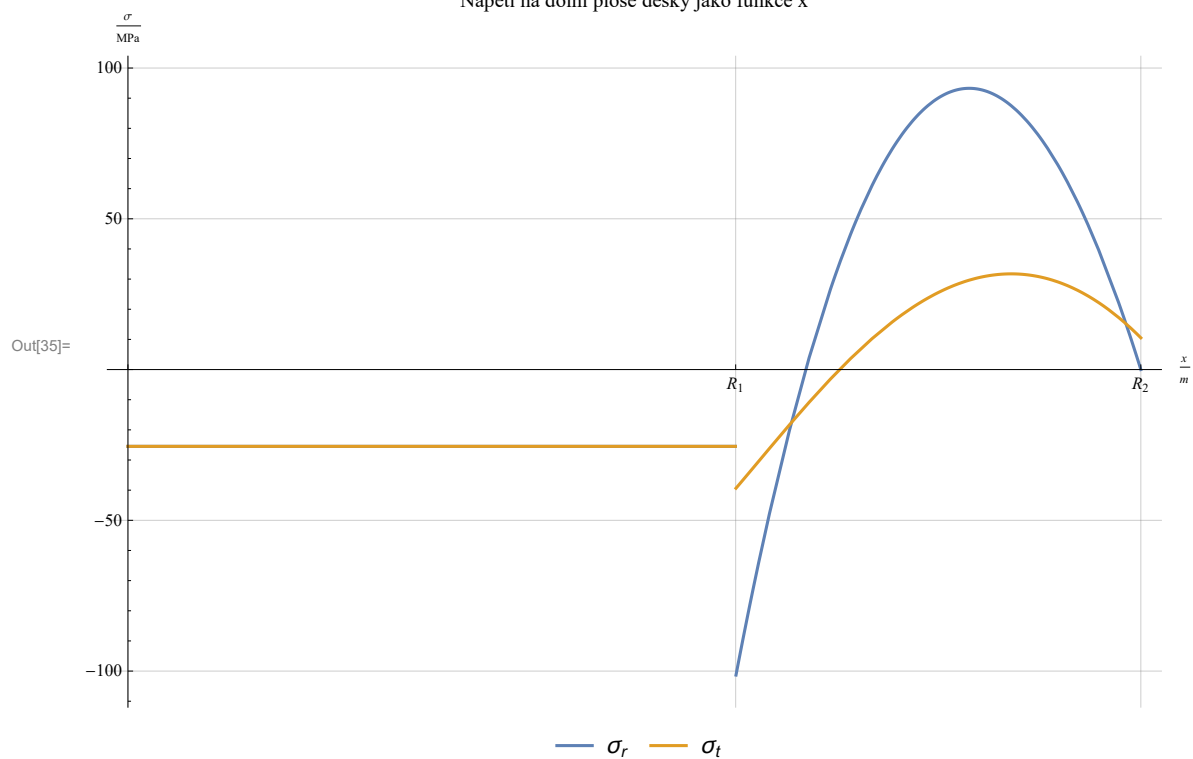




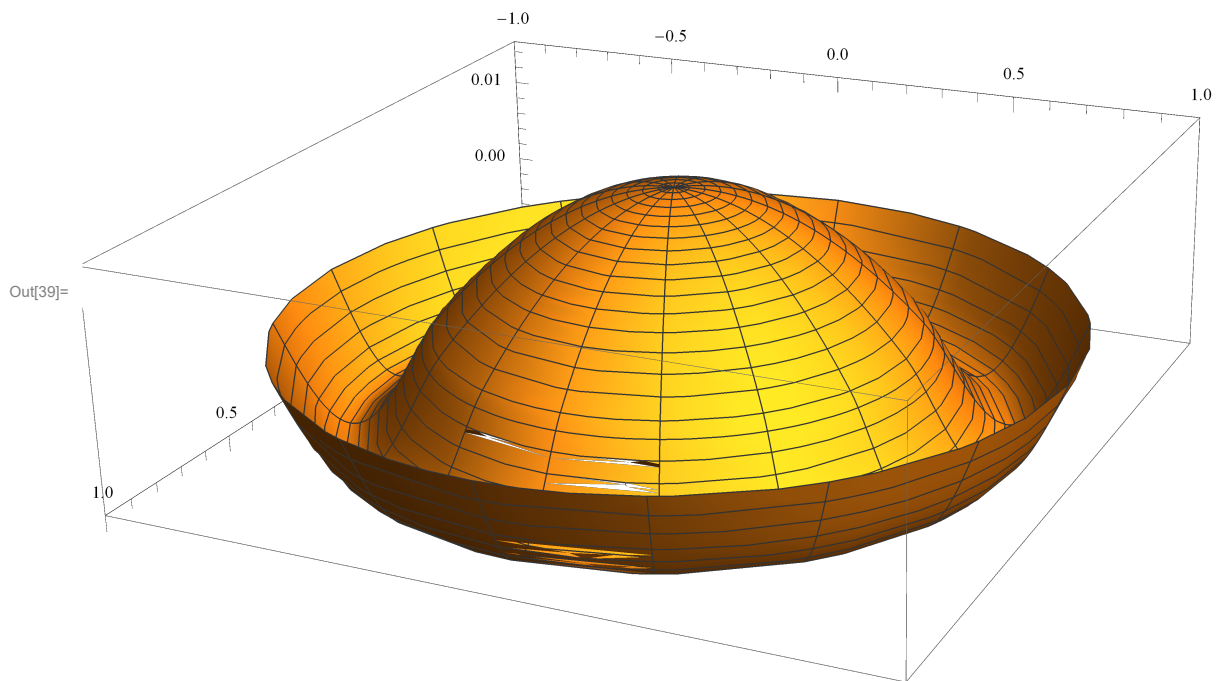
Tečné napětí na dolní ploše desky jako funkce x



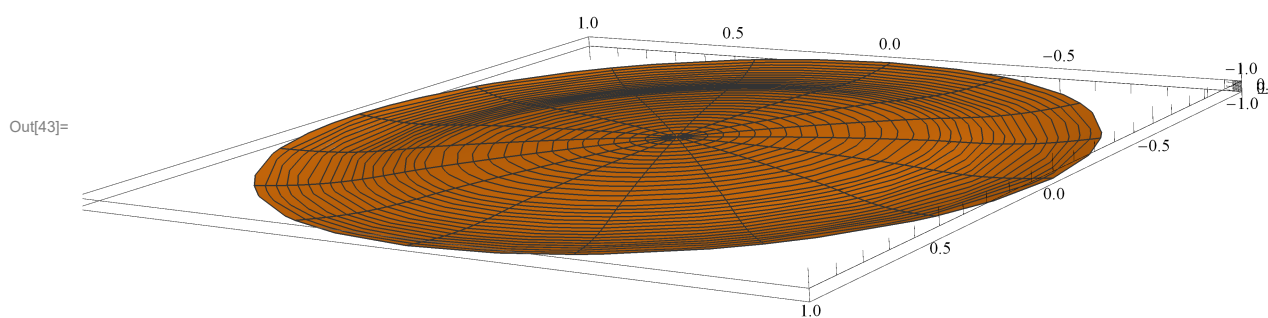
Napětí na dolní ploše desky jako funkce x



Zdeformovaná deska (deformace nejsou v měřítku)



Zdeformovaná deska (deformace jsou v měřítku)



Nakonec si můžeme ještě stanovit velikosti reakcí

In[44]:= V_1 /. reseni /. cisla

Out[44]= 3123.01

In[45]:= V_2 /. Solve[rr, V_2][[1]] /. reseni /. cisla

Out[45]= -107.084