Příklad 3.3. Pohyb hmotného bodu ve 3D prostoru ve sférických souřadnicích

Dáno: Sférické souřadnice R, θ jako funkce času

$$R = R_0\left[1 + \lambda \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right]$$

$$\theta = \pi \frac{t}{T}$$

a derivace sférické souřadnice ϕ

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T} \frac{1 - \frac{t}{T}}{\sqrt{\frac{t}{T}\left(2 - \frac{t}{T}\right)}}, \quad \phi(0) = 0.$$

Hodnoty T, R_0 a $\lambda < 1$ jsou dané konstanty.

Určit: Polohový vektor $\vec{r}(t)$, vektor rychlosti $\vec{v}(t)$ a vektor zrychlení $\vec{a}(t)$, vyjádřené ve složkách sférického souřadnicového syst. s jednotkovými bázovými vektory $\vec{e}_R$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$.

Polohový vektor je ve sférických souřadnicích vyjádřen jako

$$\vec{r} = R\vec{e}_R,$$

tedy v daném případě

$$\vec{r}(t) = R_0\left[1 + \lambda \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right]\vec{e}_R.$$

Vektor rychlosti je ve sférickém SS vyjádřen jako

$$\vec{v} = v_R \vec{e}_R + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi,$$

kde pro složky platí

$$v_R = \dot{R}, \quad v_\theta = R\dot{\theta}, \quad v_\phi = R\sin\theta\,\dot{\phi}.$$

V daném případě tedy

$$v_R = \lambda R_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$v_\theta = R_0\left[1 + \lambda \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right]\frac{\pi}{T},$$

$$v_\phi = R_0\left[1+\lambda\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]\sin\left(\pi\frac{t}{T}\right)\frac{2\pi}{T}\,\frac{1-\frac{t}{T}}{\sqrt{\frac{t}{T}\left(2-\frac{t}{T}\right)}}.$$

Vektor zrychlení je ve sférickém SS vyjádřen jako

$$\vec{a} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi,$$

kde pro složky platí

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

$$a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} - R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$a_\phi = 2\dot{R}\dot{\phi}\sin\theta + R\ddot{\phi}\sin\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta.$$

Pro dosazení použijeme kromě zadaných funkcí ještě

$$\dot{R} = \lambda R_0\frac{2\pi}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right),$$

$$\ddot{R} = -\lambda R_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\pi}{T}$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2\pi}{T}\,\frac{-\frac{1}{T}\sqrt{\frac{t}{T}\left(2-\frac{t}{T}\right)} - \left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)\frac{1}{T}}{\sqrt{\frac{t}{T}\left(2-\frac{t}{T}\right)}}}{\frac{t}{T}\left(2-\frac{t}{T}\right)}$$

Poslední výraz lze upravit na

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\pi}{T^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{t}{T}\left(2-\frac{t}{T}\right)}} + \frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^2}{\left[\frac{t}{T}\left(2-\frac{t}{T}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$