Příklad 3.1. Harmonický pohyb netlumený.

Dáno: perioda T, amplituda rychlosti V

Určit: závislosti $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ a $v(s)$.

Pro danou periodu a amplitudu rychlosti je průběh rychlosti

$$v(t) = V \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \qquad (1)$$

Odpovídající průběh výchylky je pak

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_0^t v(t)\,dt$$

neboli

$$s - s_0 = V \int_0^t \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt,$$

takže

$$s(t) = s_0 + \frac{VT}{2\pi}\left[-\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]_0^t = s_0 + \frac{VT}{2\pi}\left[1-\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]$$

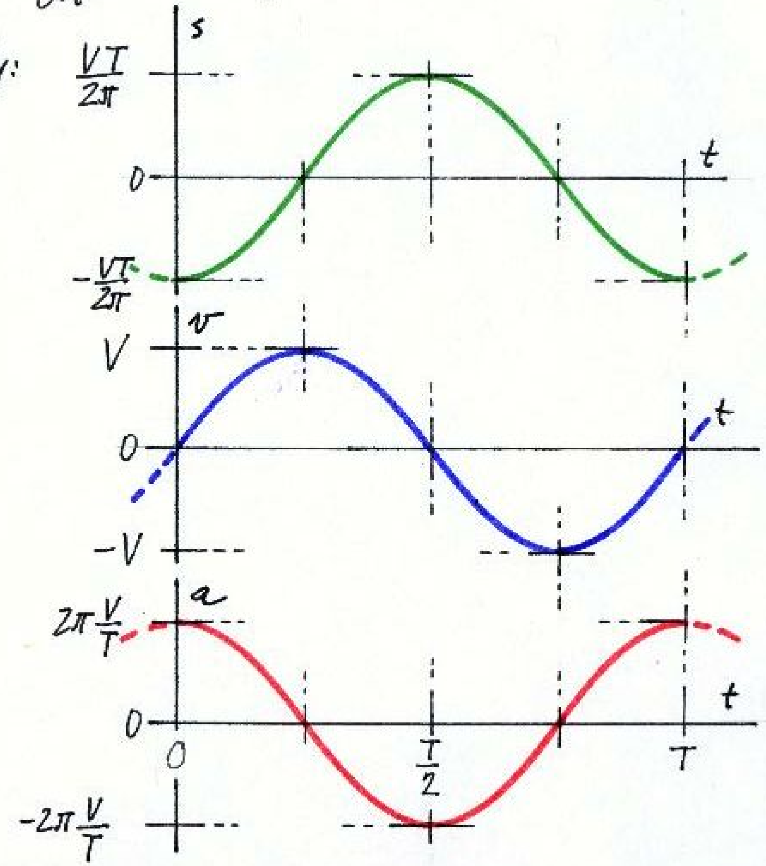
resp. speciálně pro $s_0 = -\frac{VT}{2\pi}$

$$s(t) = -\frac{VT}{2\pi}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right). \qquad (2)$$

Průběh zrychlení dostaneme derivováním

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2\pi\frac{V}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right). \qquad (3)$$

Grafy:



Pro určení <u>fázové závislosti</u> $v(s)$ použijme identitu

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (4)$$

V našem případě je z (1)

$$\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{v}{V}$$

a z (2)

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = -\frac{s}{\frac{VT}{2\pi}} \qquad (5)$$

dosazení do (4)

$$\frac{v^2}{V^2} + \frac{s^2}{\left(\frac{VT}{2\pi}\right)^2} = 1$$

dává rovnici elipsy o poloosách $\frac{VT}{2\pi}$ a V. Vypočtěme dále z (3)

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{a}{\frac{2\pi V}{T}}$$

a srovnejme s (5). Dostaneme rovnici přímky

$$\frac{a}{\frac{2\pi V}{T}} = -\frac{s}{\frac{VT}{2\pi}}.$$

Nakonec z (2) vypočteme ještě

$$t = \frac{T}{2\pi} \arccos\left(-\frac{s}{\frac{VT}{2\pi}}\right).$$

Grafy: