Příklad 3.2. Volný pohyb HB ve 2D.

Dáno: V polárních souřadnicích ρ, φ je pohyb HB dán vztahy

$$\dot\rho = -\frac{ce\sin\varphi}{a^2-e^2}, \quad \dot\varphi = \frac{c}{\rho^2},$$

kde a, c, e jsou dané konstanty.

Určit: Rovnici $\rho = \rho(\varphi)$ trajektorie HB, složky v_ρ, v_φ rychlosti a složky a_ρ, a_φ zrychlení při poč. podmínkách

$$\rho(0) = a+e, \quad \varphi(0) = 0.$$

Úpravou definičního vztahu pro $\dot\rho$

$$\dot\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\dot\varphi$$

a dosazením zadání dostaneme

$$\frac{c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{ce\sin\varphi}{a^2-e^2}$$

což lze separovat do tvaru

$$\frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{e}{a^2-e^2}\sin\varphi\, d\varphi$$

a integrovat v odpovídajících mezích

$$\int_{a+e}^{\rho(\varphi)} \frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{e}{a^2-e^2}\int_0^{\varphi}\sin\varphi\, d\varphi$$

s výsledkem

$$\left[-\frac{1}{\rho}\right]_{a+e}^{\rho(\varphi)} = \frac{e}{a^2-e^2}\left[\cos\varphi\right]_0^{\varphi}$$

neboli

$$\frac{1}{\rho(\varphi)} = \frac{1}{a+e} + \frac{e}{a^2-e^2}(1-\cos\varphi).$$

Úprava

$$\frac{1}{\rho(\varphi)} = \frac{a-e+e-e\cos\varphi}{a^2-e^2} = \frac{a-e\cos\varphi}{a^2-e^2}$$

neboli

$$\rho(\varphi) = \frac{a^2-e^2}{a-e\cos\varphi}$$

To je rovnice elipsy s ohniskem v počátku polárních souřadnic ρ, φ.

Pro složky rychlosti v polárních souřadnicích platí:

$$v_\rho = \dot\rho \,, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi .$$

V daném případě tedy

$$v_\rho = -\frac{c e \sin\varphi}{a^2-e^2} \,, \quad v_\varphi = \frac{c}{\rho} = \frac{c}{a^2-e^2}(a-e\cos\varphi)$$

Absolutní hodnota rychlosti je

$$v=\sqrt{v_\rho^2+v_\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a^2-e^2}\right)^2 e^2\sin^2\varphi + \left(\frac{c}{a^2-e^2}\right)^2 (a-e\cos\varphi)^2}$$

což je

$$v = \frac{c}{a^2-e^2}\sqrt{a^2-2ae\cos\varphi+e^2}$$

Největší je rychlost pro $\varphi=\pi$

$$v(\pi) = \frac{c}{a^2-e^2}(a+e) = \frac{c}{a-e} = v_{max}$$

a nejmenší je rychlost pro $\varphi=0$

$$v(0) = \frac{c}{a^2-e^2}(a-e) = \frac{c}{a+e} = v_{min}$$

Pro složky zrychlení v polárních souřadnicích platí

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \,, \quad a_\varphi = \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi .$$

V daném případě je

$$\ddot\rho = -\frac{ce\cos\varphi}{a^2-e^2}\dot\varphi = -\frac{c^2 e\cos\varphi}{a^2-e^2}\cdot\frac{(a-e\cos\varphi)^2}{(a^2-e^2)^2}$$

$$\rho\dot\varphi^2 = \frac{c^2}{\rho^3} = \frac{c^2(a-e\cos\varphi)^3}{(a^2-e^2)^3}$$

takže po dosazení

$$a_\rho = -\frac{ac^2}{(a^2-e^2)^3}(a-e\cos\varphi)^2$$

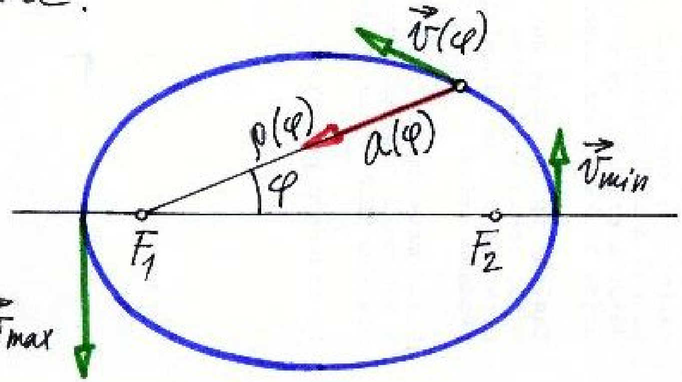
Dále

$$\ddot{\varphi} = -2\frac{c}{\rho^3}\dot{\rho},$$

takže

$$a_\varphi = -2\frac{c}{\rho^2}\dot{\rho} + 2\dot{\rho}\frac{c}{\rho^2} = 0$$

Zrychlení má tedy jen radiální složku, orientovanou do středu polárních souřadnic. Jedná se o tzv. centrální pohyb, který konají např. planety okolo slunce.



Vyšetříme ještě složky vektorů $\vec{v}$ a $\vec{a}$ v přirozeném souřadnicovém systému s bází $\vec{t}^0, \vec{n}^0$.

Platí

$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi = v\vec{t}^0,$$

přičemž absolutní hodnota (viz výše) je

$$v = \frac{c}{a^2-e^2}\sqrt{a^2-2ae\cos\varphi+e^2}.$$

Analogicky platí

$$\vec{a} = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\varphi\vec{e}_\varphi = a_t\vec{t}^0 + a_n\vec{n}^0.$$

Tečnou složku zrychlení vypočteme jako průmět vektoru $\vec{a}$ do $\vec{t}^0$

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{t}^0 = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{a_\rho v_\rho + a_\varphi v_\varphi}{v}.$$

V našem případě tedy tečná složka

$$a_t = \frac{ae^2\sin\varphi\,(a-e\cos\varphi)^2}{(a^2-e^2)^3\sqrt{a^2-2ae\cos\varphi+e^2}}.$$

Normálná složka zrychlení pak bude

$$a_n \vec{n}^0 = \vec{a} - a_t \vec{t}^0 = \vec{a} - a_t \frac{\vec{v}}{v} =$$

$$= a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi - \frac{a_t}{v}\left(v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= \left(a_\rho - \frac{a_t}{v} v_\rho\right)\vec{e}_\rho + \left(a_\varphi - \frac{a_t}{v} v_\varphi\right)\vec{e}_\varphi .$$

V daném případě je po úpravě

$$\frac{a_t}{v} = \frac{ace\sin\varphi\,(a - e\cos\varphi)^2}{(a^2 - e^2)^2 (a^2 - 2ae\cos\varphi + e^2)} ,$$

takže po dosazení za $v_\rho, v_\varphi, a_\rho, a_\varphi$ máme

$$a_n \vec{n}^0 = \left[-\frac{ac^2}{(a^2-e^2)^3}(a - e\cos\varphi)^2 + \frac{ac^2e^2\sin^2\varphi\,(a - e\cos\varphi)^2}{(a^2-e^2)^3(a^2 - 2ae\cos\varphi + e^2)} \right]\vec{e}_\rho -$$

$$- \frac{ac^2e\sin\varphi\,(a - e\cos\varphi)^3}{(a^2-e^2)^3(a^2 - 2ae\cos\varphi + e^2)}\,\vec{e}_\varphi$$

Samotná hodnota a_n je nakonec absolutní hodnotou vektoru na pravé straně.

Znalost hodnoty a_n nám umožní výpočet poloměru křivosti R eliptické trajektorie v příslušném bodě

$$a_n = \frac{v^2}{R} , \quad R = \frac{v^2}{a_n} .$$