Příklad 6.1. Transformační matice.

Dáno: Směrové úhly $\alpha_x = 45° = \frac{\pi}{4}$

$$\beta_x = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha_y = 80° = \frac{4\pi}{9}$$

Určit: Transformační matici

$$\mathbf{T}^{GL} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z \\ \cos\beta_x & \cos\beta_y & \cos\beta_z \\ \cos\gamma_x & \cos\gamma_y & \cos\gamma_z \end{bmatrix}$$

Řešení: Pro směrové úhly lokálních souřadnicových os x^L, y^L, z^L platí (jako pro kteroukoliv přímku)

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\beta_x + \cos^2\gamma_x = 1 \qquad (1)$$

$$\cos^2\alpha_y + \cos^2\beta_y + \cos^2\gamma_y = 1 \qquad (2)$$

$$\cos^2\alpha_z + \cos^2\beta_z + \cos^2\gamma_z = 1 . \qquad (3)$$

Kromě toho musí být jednotkové bázové vektory $\vec{i}_L, \vec{j}_L, \vec{k}_L$ navzájem kolmé, takže

$$\vec{i}_L \cdot \vec{j}_L = 0 \qquad (4)$$

$$\vec{j}_L \cdot \vec{k}_L = 0 \qquad (5)$$

$$\vec{k}_L \cdot \vec{i}_L = 0 . \qquad (6)$$

Vyjádření lokálních bázových vektorů $\vec{i}_L, \vec{j}_L, \vec{k}_L$ pomocí složek v globálním souř. systému je

$$\vec{i}_L = \cos\alpha_x \vec{i}_G + \cos\beta_x \vec{j}_G + \cos\gamma_x \vec{k}_G$$

$$\vec{j}_L = \cos\alpha_y \vec{i}_G + \cos\beta_y \vec{j}_G + \cos\gamma_y \vec{k}_G$$

$$\vec{k}_L = \cos\alpha_z \vec{i}_G + \cos\beta_z \vec{j}_G + \cos\gamma_z \vec{k}_G ,$$

takže dosazení do rovnic (4) až (6) je

$$\cos\alpha_x \cos\alpha_y + \cos\beta_x \cos\beta_y + \cos\gamma_x \cos\gamma_y = 0 \qquad (4')$$

$$\cos\alpha_y \cos\alpha_z + \cos\beta_y \cos\beta_z + \cos\gamma_y \cos\gamma_z = 0 \qquad (5')$$

$$\cos\alpha_z \cos\alpha_x + \cos\beta_z \cos\beta_x + \cos\gamma_z \cos\gamma_x = 0 \qquad (6')$$

V rovnicích (1) až (3) a (4') až (6') jsou tři hodnoty ($\alpha_x, \beta_x, \alpha_y$) zadány, takže pro zbývajících 6 ($\gamma_x, \beta_y, \gamma_y, \alpha_z, \beta_z, \gamma_z$) je soustava <u>úplná</u>.

Označme úhly pro stručnost

$$\cos\alpha_x = a_x, \quad \cos\alpha_y = a_y, \quad \cos\alpha_z = a_z$$
$$\cos\beta_x = b_x, \quad \cos\beta_y = b_y, \quad \cos\beta_z = b_z$$
$$\cos\gamma_x = c_x, \quad \cos\gamma_y = c_y, \quad \cos\gamma_z = c_z.$$

Z rovnic (1) až (3) vypočteme c_x, c_y, c_z

$$c_x = \pm\sqrt{1 - a_x^2 - b_x^2} \qquad (1')$$
$$c_y = \pm\sqrt{1 - a_y^2 - b_y^2} \qquad (2')$$
$$c_z = \pm\sqrt{1 - a_z^2 - b_z^2} \qquad (3')$$

a dosadíme do (4') až (6'). Po rozdělení na obě strany rovnic a umocnění dostaneme

$$(a_x a_y + b_x b_y)^2 = (1 - a_x^2 - b_x^2)(1 - a_y^2 - b_y^2) \qquad (7)$$
$$(a_y a_z + b_y b_z)^2 = (1 - a_y^2 - b_y^2)(1 - a_z^2 - b_z^2) \qquad (8)$$
$$(a_z a_x + b_z b_x)^2 = (1 - a_z^2 - b_z^2)(1 - a_x^2 - b_x^2) \qquad (9).$$

V rovnicích (7) až (9) pro úhly jsou tři neznámé (b_y, a_z, b_z). Rovnice jsou ale kvadratické, takže celkem existuje $2^3 = 8$ různých řešení. Před numerickým řešením rovnice dále zjednodušíme. Po vynásobení levé a pravé strany rovnice (7) dostaneme

$$a_x^2 a_y^2 + 2a_x a_y b_x b_y + b_x^2 b_y^2 = 1 - a_y^2 - b_y^2 - a_x^2 + a_x^2 a_y^2 + a_x^2 b_y^2 - b_x^2 + b_x^2 a_y^2 + b_x^2 b_y^2$$

a po úpravě

$$(a_x^2 - 1)\, b_y^2 - 2a_x a_y b_x b_y + (1 - a_y^2 - a_x^2 - b_x^2 + b_x^2 a_y^2) = 0$$

máme standardní kvadratickou rovnici tvaru

$$A b_y^2 + B b_y + C = 0,$$

kde význam A, B, C je zřejmý.

Pro dané hodnoty $\alpha_x, \beta_x, \alpha_y$ je numerický výsledek

$$b_{y_{1,2}} = (\text{vypočtěte!})$$

Nyní vybereme např. kladnou z vypočtených hodnot a dosadíme do (1') a (2').

Vypočteme

$$c_{x_{1,2}} = (\text{vypočtěte!})$$

$$c_{y_{1,2}} = (\text{vypočtěte!})$$

Vybereme např. opět kladné hodnoty a máme jedno kompletní řešení pro 1. a 2. sloupec transformační matice resp. pro složky $\vec{i}_L, \vec{j}_L$. Odpovídající jednotkový vektor $\vec{k}_L$ pak můžeme stanovit z rovnice

$$\vec{k}_L = \vec{i}_L \times \vec{j}_L$$

Numericky

$$\vec{k}_L = (\text{vypočtěte})\,\vec{i}_G + (\text{vypočtěte})\,\vec{j}_G + (\text{vypočtěte})\,\vec{k}_G.$$

Nakonec je tedy jedno z možných řešení pro transformační matici

$$T^{GL} = \begin{bmatrix} & \text{vypočtěte} & \end{bmatrix}.$$

Poznámka: Z důvodu nejednoznačnosti řešení se směrové úhly os lokálního SS pro výpočet prvků transformační matice nepoužívají. Později poznáme jiné systémy tzv. prostorových úhlů používané pro výpočet prvků transformačních matic.