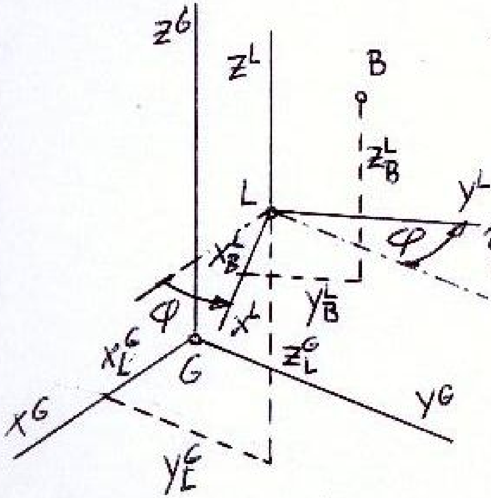
Příklad 10.2. Šroubový pohyb s 1° volnosti.

Dáno: konstanty $v_0, T, x_L^G, y_L^G, x_B^L, y_B^L, z_B^L, h$;



- vertikální rychlost

$$v_{Lz}^G(t) = \begin{cases} 4v_0 \frac{t}{T}, & t \le \frac{T}{4} \\ v_0, & \frac{T}{4} < t \le \frac{3T}{4} \\ 4v_0\left(1-\frac{t}{T}\right), & t > \frac{3T}{4}; \end{cases}$$

- vazba mezi otáčením a zdvihem

$$\omega = \frac{2\pi}{h} v_{Lz}^G ;$$

- počáteční podmínky polohy

$$z_L^G(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 ;$$

- polohový vektor obecného bodu B.

$$\mathbb{r}_B^L = \begin{bmatrix} x_B^L \\ y_B^L \\ z_B^L \end{bmatrix}$$

Určit:

- kinematické veličiny bodu L

$$\mathbb{r}_L^G(t), \; \mathbb{v}_L^G(t), \; \mathbb{a}_L^G(t);$$

- kinematické veličiny relativní rotace okolo osy z^L

$$\varphi(t), \; \omega(t), \; \alpha(t);$$

- kinematické veličiny obecného bodu B

$$\mathbb{r}_B^G(t), \; \mathbb{v}_B^G(t), \; \mathbb{a}_B^G(t).$$

Řešení: Pohyb bodu L je přímočarý pohyb se zadanou rychlostí. Je proto

$$x_L^G = \text{konst.}, \quad y_L^G = \text{konst.}$$

a z-ovou souřadnici získáme integrací rovnice

$$\frac{dz_L^G}{dt} = v_{Lz}^G(t).$$

Obecně je

$$\int_{z_L^G(t_0)}^{z_L^G(t)} dz_L^G = \int_{t_0}^{t} v_{Lz}^G(t)\,dt \Rightarrow z_L^G(t) = z_L^G(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_{Lz}^G(t)\,dt.$$

V prvním subintervalu $t \le \frac{T}{4}$ platí

$t_0=0,\ z_L^G(t_0)=z_L^G(0)=0,\ v_{Lz}^G(t)=\frac{4v_0}{T}t,$

takže

$$z_L^G(t)=\frac{2v_0}{T}t^2.$$

Ve druhém subintervalu $\frac{T}{4}<t\le\frac{3T}{4}$ je

$t_0=\frac{T}{4},\ z_L^G(t_0)=z_L^G\left(\frac{T}{4}\right)=\frac{v_0T}{8},\ v_{Lz}^G(t)=v_0,$

takže

$$z_L^G(t)=v_0\left(\frac{T}{8}+t-\frac{T}{4}\right)=v_0\left(t-\frac{T}{8}\right).$$

Ve třetím subintervalu $\frac{3T}{4}<t\le T$ je

$t_0=\frac{3T}{4},\ z_L^G(t_0)=z_L^G\left(\frac{3T}{4}\right)=\frac{5}{8}v_0T,\ v_{Lz}^G(t)=4v_0\left(1-\frac{t}{T}\right),$

takže

$$z_L^G(t)=\frac{5}{8}v_0T+4v_0\int_{\frac{3T}{4}}^{t}\left(1-\frac{t}{T}\right)dt.$$

Po integraci a úpravě

$$z_L^G(t)=v_0\left[4t\left(1-\frac{t}{2T}\right)-\frac{10}{8}T\right].$$

Celkový zdvih za dobu T bude

$$z_L^G(T)=\frac{3}{4}v_0T.$$

Jednotným zápisem je tedy

$$z_L^G(t)=\begin{cases}\frac{2v_0}{T}t^2, & t\le\frac{T}{4}\\ v_0\left(t-\frac{T}{8}\right), & \frac{T}{4}<t\le\frac{3T}{4}\\ v_0\left[4t\left(1-\frac{t}{2T}\right)-\frac{10}{8}T\right], & \frac{3T}{4}<t.\end{cases}$$

a

$$\mathbf{r}_L^G(t)=\begin{bmatrix}x_L^G\\ y_L^G\\ z_L^G(t)\end{bmatrix},$$

<u>Rychlost bodu L</u>

$$\mathbf{v}_L^G(t)=\dot{\mathbf{r}}_L^G=\begin{bmatrix}0\\0\\v_{Lz}^G(t)\end{bmatrix};$$

kde $v_{Lz}^G(t)$ je zadáno.

<u>Zrychlení bodu L</u> je

$$\mathbf{a}_L^G(t)=\dot{\mathbf{v}}_L^G,$$

$$\mathbf{a}_L^6(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{Lz}^6(t) \end{bmatrix},$$

kde

$$a_{Lz}^6(t) = \begin{cases} \frac{4v_0}{T}, & t \leq \frac{T}{4} \\ 0, & \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4} \\ -\frac{4v_0}{T}, & \frac{3T}{4} < t. \end{cases}$$

Kinematické veličiny relativní rotace.

Vyjdeme ze zadané vazební rovnice

$$\omega = \frac{2\pi}{h} v_{Lz}^6 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{h} \frac{dz_L^6}{dt}.$$

Separovaná diferenciální rovnice je

$$d\varphi = \frac{2\pi}{h} dz_L^6,$$

takže s přihlédnutím k zadaným počátečním podmínkám je

$$\int_0^\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{h} \int_0^{z_L^6} dz_L^6$$

s výsledkem

$$\varphi = \frac{2\pi}{h} z_L^6,$$

takže

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{4\pi v_0}{Th} t^2, & t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{2\pi v_0}{h}\left(t - \frac{T}{8}\right), & \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4} \\ \frac{2\pi v_0}{h}\left[4t\left(1 - \frac{t}{2T}\right) - \frac{10}{8}T\right], & \frac{3T}{4} < t. \end{cases}$$

Úhlová rychlost podle zadání

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{8\pi v_0}{Th} t, & t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{2\pi v_0}{h}, & \frac{T}{4} < t \leq \frac{3T}{4} \\ \frac{8\pi v_0}{Th}\left(1 - \frac{t}{T}\right), & \frac{3T}{4} < t. \end{cases}$$

KIN-10-2.4

Úhlové zrychlení pak je

$$\alpha(t) \begin{cases} \dfrac{8\pi v_0}{Th}, & t \le \dfrac{T}{4} \\ 0, & \dfrac{T}{4} < t \le \dfrac{3T}{4} \\ -\dfrac{8\pi v_0}{Th}, & \dfrac{3T}{4} < t. \end{cases}$$

Kinematika obecného bodu B

je popsána rovnicemi

$$\mathbb{r}_B^G = \mathbb{r}_L^G + \mathbb{T}^{GL}\mathbb{r}_B^L,$$

$$\mathbb{v}_B^G = \mathbb{v}_L^G + \dot{\mathbb{T}}^{GL}\mathbb{r}_B^L,$$

$$\mathbb{a}_B^G = \mathbb{a}_L^G + \ddot{\mathbb{T}}^{GL}\mathbb{r}_B^L,$$

kde stejně jako u rotace okolo z^L je

$$\mathbb{T}^{GL} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbb{T}}^{GL} = \omega \cdot \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbb{T}}^{GL} = \alpha \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$