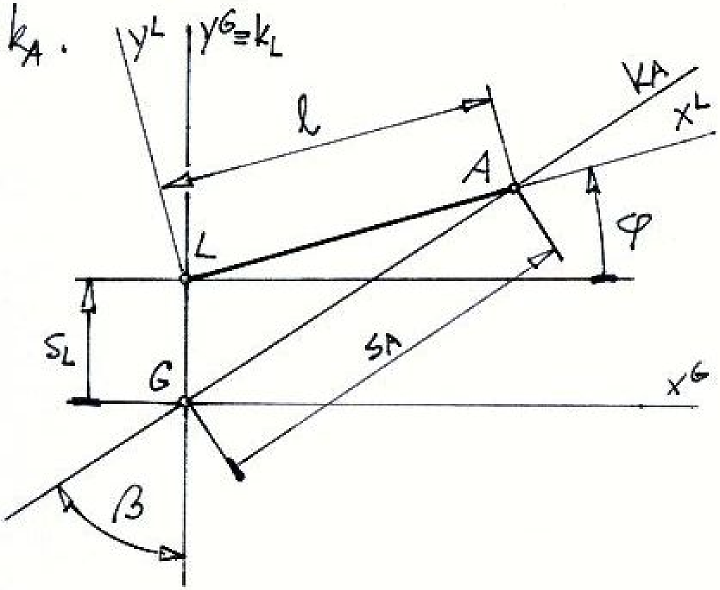
Příklad 10.1. Kinematická geometrie ORP.

Obecný rovinný pohyb s 1° volnosti je podle obrázku zadán dvojicí vazeb typu bod/přímka $L \in k_L \equiv y^G$ a $A \in k_A$.



Dáno: konstanty l, β.

Určit: polodii pevnou k_p, polodii hybnou k_h.

Řešení: Za referenční bod ORP zvolíme počátek L lokálního souřadnicového systému. Transformační rovnice ORP psaná pro vázaný bod A pak bude

$$\mathbf{r}_A^G = \mathbf{r}_L^G + \mathbf{T}^{GL}\,\mathbf{r}_A^L, \qquad (1)$$

kde

$$\mathbf{r}_A^G = s_A\begin{bmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{r}_L^G = \begin{bmatrix}0\\ s_L\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{r}_A^L = \begin{bmatrix}l\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Transformační matice je standardní pro rotaci okolo osy z. Dosazení do vektorové rovnice (1) pak dává dvě skalární rovnice

$$s_A \sin\beta = l\cos\varphi \qquad (2)$$

$$s_A \cos\beta = s_L + l\sin\varphi, \qquad (3)$$

z nichž vyjádříme s_A a s_L jako funkce úhlu φ. Eliminací podle schematu

$$(2)\cdot\cos\beta + (3)\cdot(-\sin\beta)$$

vyloučíme s_A a dostaneme

$$0 = l\cos\varphi\cos\beta - s_L\sin\beta - l\sin\varphi\sin\beta$$

odkud vyplývá

$$s_L = l\,\frac{\cos(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\,. \qquad (4)$$

Z rovnice (2) pak přímo dostáváme

$$s_A = l\,\frac{\cos\varphi}{\sin\beta}\,.$$

Pro polohu pólu platí rovnice

$$\mathbb{r}_P^G = \mathbb{r}_L^G + \mathbb{T}^{GL}\mathbb{r}_P^L \qquad (5)$$

s podmínkou

$$\mathbb{v}_P^G = \mathbb{0}\,,$$

neboli

$$\mathbb{v}_L^G + \dot{\mathbb{T}}^{GL}\mathbb{r}_P^L = \mathbb{0}. \qquad (6)$$

Zde

$$\mathbb{v}_L^G = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{s}_L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbb{T}}^{GL} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\varphi}\,,$$

kde podle (4)

$$\dot{s}_L = -l\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\,\dot{\varphi}\,. \qquad (7)$$

Řešení rovnice (6) pro $\mathbb{r}_P^L$ je

$$\mathbb{r}_P^L = -\left(\dot{\mathbb{T}}^{GL}\right)^{-1}\mathbb{v}_L^G\,,$$

přičemž

$$\left(\dot{\mathbb{T}}^{GL}\right)^{-1} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbb{r}_P^L = -\frac{1}{\dot{\varphi}}\begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{s}_L \\ 0 \end{bmatrix},$$

neboli po provedení a dosazení ze (7)

$$\mathbb{r}_P^L = -\frac{1}{\dot\varphi}\begin{bmatrix}\dot s_L\cos\varphi\\ -\dot s_L\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix} = -\frac{\dot s_L}{\dot\varphi}\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix} = l\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

Odpovídající dvojice skalárních rovnic

$$x_P^L(\varphi) = l\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\cos\varphi \qquad (8)$$

$$y_P^L(\varphi) = -l\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\sin\varphi \qquad (9)$$

už představuje <u>parametrické rovnice hybné polodie</u> s parametrem φ.

Nyní dosadíme do rovnice (5), abychom dostali polohu pólu v globálním SS.

$$\mathbb{r}_P^G = \begin{bmatrix}0\\ s_L\\ 0\end{bmatrix} + l\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix}.$$

Úpravou

$$\mathbb{r}_P^G = \begin{bmatrix}0\\ s_L\\ 0\end{bmatrix} + l\,\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\beta}\begin{bmatrix}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\\ \sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

a použitím trigonometrické identity $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ dostaneme po dosazení za s_L ze (4) dvě skalární rovnice

$$x_P^G(\varphi) = \frac{l}{\sin\beta}\sin(\varphi+\beta) \qquad (10)$$

$$y_P^G(\varphi) = \frac{l}{\sin\beta}\cos(\varphi+\beta)\,, \qquad (11)$$

které už představují <u>parametrické rovnice pevné polodie</u> s parametrem φ.

Tím je řešení úlohy prakticky u konce, ale můžeme se pokusit pro lepší názornost vyloučit z parametrických rovnic parametr φ.

Povýšíme-li rovnice (10) a (11) na druhou a sečteme, dostaneme

$$(x_P^G)^2 + (y_P^G)^2 = \frac{l^2}{\sin^2\beta}, \quad (12)$$

což je rovnice kružnice v centrální poloze. Je tedy <u>pevná polodia kružnice se středem v počátku G globálního souřadnicového systému o poloměru $l/\sin\beta$.</u>

Vyloučení parametru z rovnic (8) a (9) je složitější. Nejprve provedeme úpravu podle schematu

$$(8)\cdot\cos\varphi + (9)\cdot\sin\varphi .$$

Po ní je

$$x_P^L\cos\varphi - y_P^L\sin\varphi = \frac{l}{\sin\beta}(\sin\varphi\cos\beta + \cos\varphi\sin\beta),$$

když jsme použili součtový vzorce pro $\sin(\varphi+\beta)$. Další úpravou dostaneme

$$(x_P^L - l)\cos\varphi = \left(y_P^L + l\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)\sin\varphi$$

neboli

$$\frac{x_P^L - l}{y_P^L + l\frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \operatorname{tg}\varphi . \quad (13)$$

Současně je ale dělením rovnice (9) rovnicí (8)

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{y_P^L}{x_P^L},$$

takže dosazením zpět do (13) máme po úpravě

$$(x_P^L)^2 - x_P^L l + (y_P^L)^2 + y_P^L l\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = 0 . \quad (14)$$

Nyní doplníme levou i pravou stranu rovnice (14) tak, aby na levé straně vznikly "úplné čtverce"; dostaneme

$$(x_P^L)^2 - x_P^L l + \frac{l^2}{4} + (y_P^L)^2 + y_P^L l\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{l^2}{4}\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2 =$$

KIN-10-1.5

$$= \frac{l^2}{4}\left(1+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}\right).$$

Nakonec tedy máme

$$\left(x_P^L - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y_P^L + \frac{l}{2\,\mathrm{tg}\beta}\right)^2 = \left(\frac{l}{2\sin\beta}\right)^2,$$

což je opět rovnice kružnice. Je tedy hybná polodie kružnice se středem v bodě $\left[\frac{l}{2}, -\frac{l}{2\,\mathrm{tg}\beta}\right]$ lokálního souřadnicového systému o poloměru $l/2\sin\beta$.

Tyto dodatečné údaje o tvaru polodií nám umožní snadno nakreslit obě polodie. Na obrázku je nakreslena poloha pro hodnotu $\varphi=0$ polohového úhlu relativní rotace. Nakreslete si polohu jinou!