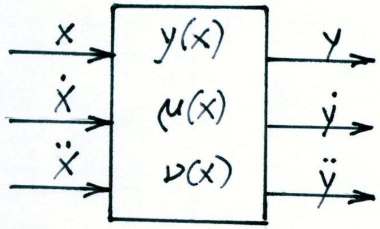
**Příklad 12.1.** Mechanismus jako "černá skříňka".




**Dáno:**

- konstanty $a, b, k, L, y_0$;
- 1. převodová funkce
$$\mu = \frac{a}{\cos(b-y)} \quad ; (1)$$
- vstupní rychlost
$$\dot{x} = \begin{cases} k\sqrt{\frac{x}{L}} & \text{pro } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ k\sqrt{8}\left(\frac{x}{L}-1\right)^2 & \text{pro } \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \quad ; (2)$$
- počáteční podmínky
$$t=0,\ x=0,\ y=y_0 .$$

**Určit:**
- zdvihovou závislost $y(x)$;
- 2. převodovou funkci $\nu(x)$;
- vstupní parametr $x(t)$;
- vstupní zrychlení $\ddot{x}(t)$;
- výstupní veličiny $y, \dot{y}, \ddot{y}$.

**KIN-12-1.1**

**Řešení:**

Zadaná 1. převodová funkce $\mu$ je derivací zdvihové závislosti podle vstupního parametru $x$. Tedy

$$\frac{dy}{dx} = \mu = \frac{a}{\cos(b-y)} .$$

Separací proměnných dostaneme

$$\int_{y_0}^{y} \cos(b-y)\,dy = a\int_0^x dx \qquad (3)$$

Integrál na levé straně řešíme substitucí $b-y=z$, $dy=-dz$, tj.

$$-\int_{b-y_0}^{b-y} \cos z\,dz = \left[-\sin z\right]_{b-y_0}^{b-y} = \sin(b-y_0)-\sin(b-y),$$

takže řešení (3) je

$$\sin(b-y_0)-\sin(b-y) = ax$$

resp.

$$y(x) = b - \arcsin\left[\sin(b-y_0)-ax\right], \qquad (4)$$

což je hledaná zdvihová závislost.

2. převodová funkce $\nu$ je derivace 1. převodové funkce podle $x$, tedy

$$\nu = \frac{d\mu}{dx}.$$

V řešeném příkladě je ale $\mu$ dáno jako funkce $y$, viz (1). Proto bude

$$\nu = \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mu}{dy}\frac{dy}{dx} = \mu\frac{d\mu}{dy}. \quad (5)$$

Vypočteme tedy nejprve

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{a\sin(b-y)}{\cos^2(b-y)}$$

a dosadíme do (5) s výsledkem

$$\nu = -\frac{a^2\sin(b-y)}{\cos^3(b-y)}; \quad (6)$$

Tím dostáváme 2. převodou funkci.

Závislost vstupního parametru $x$ na čase dostaneme integrováním (2).

V 1. subintervalu $0 \le x < L/2$ platí

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{\frac{x}{L}}.$$

Separace s použitím počáteční podmínky je

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{L}}} = k\int_0^t dt$$

a odpovídající řešení

$$2L\sqrt{\frac{x}{L}} = kt \Rightarrow x(t) = \frac{k^2}{4L}t^2$$

platí až do okamžiku $\sqrt{2}L/k$, kdy $x$ dosahuje mezní hodnoty subintervalu.

Ve 2. subintervalu $L/2 \le x < L$ platí

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{8}\left(\frac{x}{L}-1\right)^2.$$

Separace s použitím hodnot $x$ a $t$ pro konec 1. subintervalu je

$$\int_{L/2}^{x} \frac{dx}{\left(\frac{x}{L}-1\right)^2} = k\sqrt{8}\int_{\sqrt{2}L/k}^{t} dt$$

a odpovídající řešení

$$L\frac{2x-L}{x-L}=k\sqrt{8}\left(t-\sqrt{2}\,\frac{L}{k}\right).$$

Odtud

$$x(t)=L\frac{2\sqrt{2}kt-3L}{2(\sqrt{2}kt-L)},$$

což platí až do konce 2. subintervalu, kdy $x=L$ a $t=T=\infty$.

Výsledek pro $x(t)$ je tedy

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{k^2}{4L}t^2 & \text{pro } 0\le t\le\sqrt{2}\dfrac{L}{k}\\[2ex] L\dfrac{2\sqrt{2}kt-3L}{2(\sqrt{2}kt-L)} & \sqrt{2}\dfrac{L}{k}\le t<\infty\end{cases}\qquad(7)$$

<u>2. derivaci vstupní veličiny</u> dostaneme derivováním zadané funkce (2) pro $\dot{x}$ podle času. Protože ale je $\dot{x}$ zadáno jako funkce $x$, musíme použít vztah

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}(\dot{x})=\frac{d(\dot{x})}{dx}\frac{dx}{dt}=\dot{x}\,\frac{d(\dot{x})}{dx}.$$

V daném případě to znamená, že

$$\ddot{x}=\begin{cases}\dfrac{k^2}{2L} & \text{pro } 0\le x\le\dfrac{L}{2}\\[2ex] \dfrac{16k^2}{L}\left(\dfrac{x}{L}-1\right)^3 & \dfrac{L}{2}\le x<L\end{cases}\qquad(8)$$

Nakonec <u>výstupní veličiny mechanismu.</u>

Zdvihová závislost je dána funkcí (4), kam dosazujeme za $x$ výsledek (7).

<u>Výstupní rychlost $\dot{y}$</u>. S použitím 1. přev. funkce, zadané vztahem (1), platí

$$\dot{y}=\mu\dot{x}=\frac{a}{\cos(b-y)}\dot{x},$$

kam za $y$ dosazujeme (4), za $\dot{x}$ (2) a za $x$ (7). <u>Výstupní zrychlení $\ddot{y}$</u> je

$$\ddot{y}=\nu\dot{x}^2+\mu\ddot{x}$$

s $\nu$ podle (6), $\mu$ podle (1), $\dot{x}$ podle (2), $\ddot{x}$ podle (8) a $x$ podle (7).