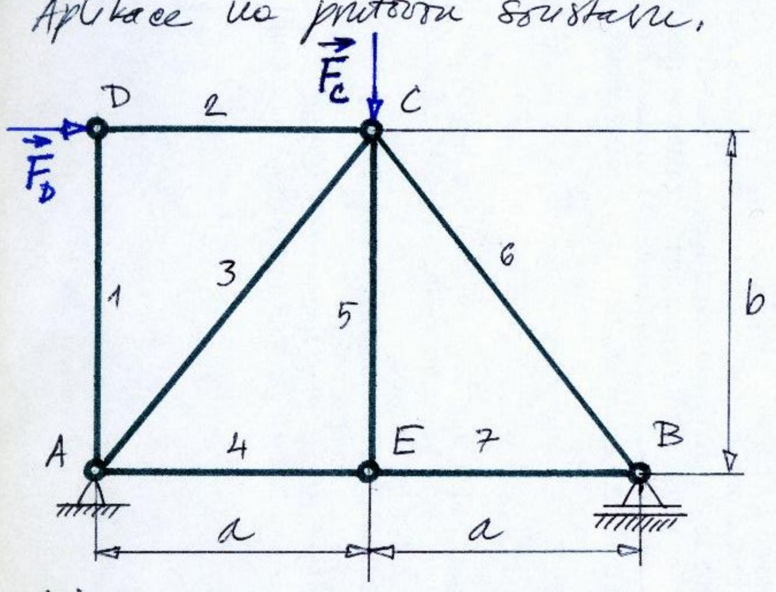
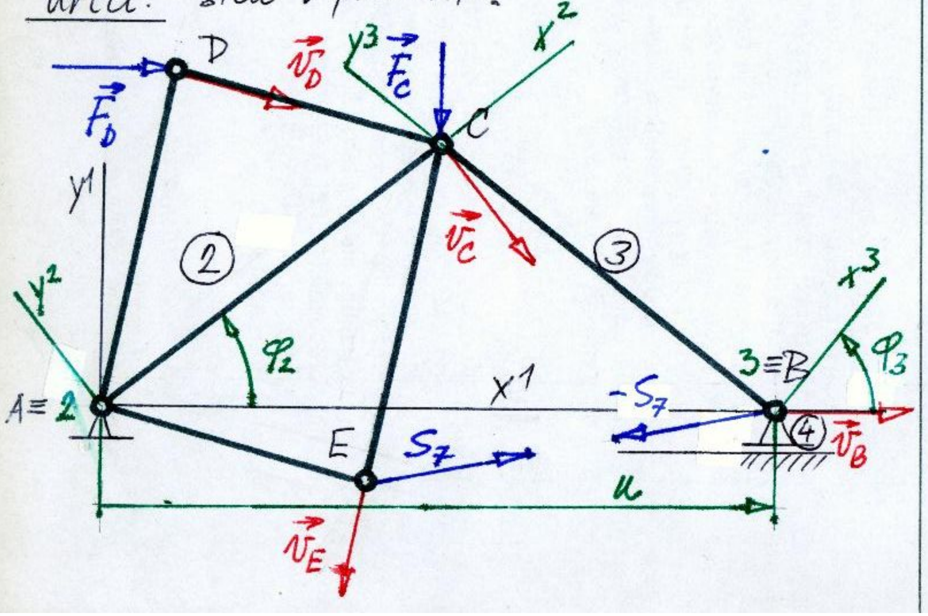
Příklad 14.6. Metoda virtuálních výkonů.

Aplikace na prutovou soustavu.



Dáno: rozměry a, b; síly F_C, F_D;

Určit: sílu v prutu 7.



Řešení

Protože v úloze nejsou přítomny silové dvojice, je princip virtuálních výkonů popsán rovnicí

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i^1 \cdot \mathbb{v}_i^1 = 0 , \qquad (1)$$

kde $\mathbb{F}_i^1$ resp. $\mathbb{v}_i^1$ jsou síla působící v bodě i soustavy resp. rychlost bodu i soustavy.

Protože je zadána nepohyblivá (prutová) soustava, nelze o rychlostech hovořit. Proto je nutné ze soustavy nepohyblivé vytvořit soustavu pohyblivou, což se udělá tak, že vyjmeme prut, jehož osovou sílu máme určit, a nahradíme jej právě onou hledanou silou. Upravenou soustavu nakreslíme v obecné poloze. Soustava se stane 4-článkovým mechanismem: těleso 2 je tvořeno pruty 1 ÷ 5, těleso 3 prutem 6 a těleso 4 je posuvná podpora v bodě B.

Kinematickou částí úlohy je nyní výpočet rychlostí $\vec{v}_B, \vec{v}_C, \vec{v}_D, \vec{v}_E$ za předpokladu, že jedna z nich je dána. Jedná se o kinematiku mechanismu, proto postupujeme standardním způsobem:

Zavedeme SS $(1, x^1, y^1)$, $(2, x^2, y^2)$ a $(3, x^3, y^3)$.

Vazební body jsou C a B. Pro ně platí

$$\mathbf{r}_C^1 = \mathbf{T}^{12}\mathbf{r}_C^2 = \mathbf{r}_3^1 + \mathbf{T}^{13}\mathbf{r}_C^3 \qquad (2)$$

$$\mathbf{r}_B^1 = \mathbf{r}_3^1$$

Základní rovnicí mechanismu tak je

$$\mathbf{T}^{12}\mathbf{r}_C^2 = \mathbf{r}_B^1 + \mathbf{T}^{13}\mathbf{r}_C^3, \qquad (3)$$

kde

$$\mathbf{T}^{12} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_C^2 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\mathbf{r}_B^1 = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{13} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_C^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po dosazení do (3) máme dvě skalární rovnice

$$\left.\begin{aligned} c\cos\varphi_2 &= u - c\sin\varphi_3 \\ c\sin\varphi_2 &= c\cos\varphi_3 \end{aligned}\right\}(4)$$

Pro výpočet φ_3 jako funkce u vyloučíme φ_2. Dostaneme

$$c^2 = u^2 - 2uc\sin\varphi_3 + c^2$$

neboli

$$\varphi_3 = \arcsin\frac{u}{2c}. \qquad (5)$$

Pro výpočet φ_2 nejprve rovnice (4) přepíšeme do tvaru

$$u - c\cos\varphi_2 = c\sin\varphi_3$$
$$c\sin\varphi_2 = c\cos\varphi_3$$

a vyloučíme φ_3. Výsledek

$$u^2 - 2uc\cos\varphi_2 + c^2 = c^2$$

nebo li

$$\varphi_2 = \arccos \frac{u}{2c} \,. \qquad (6)$$

Pro výpočet rychlostí v bodech B, C, D, E budeme potřebovat $\dot{u}, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$. Dostaneme je implicitním derivováním rovnic (4):

$$-c \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2 + c\cos\varphi_3 \dot{\varphi}_3 = \dot{u}$$

$$c\cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2 + c\sin\varphi_3 \dot{\varphi}_3 = 0$$

Řešení Cramerovým pravidlem

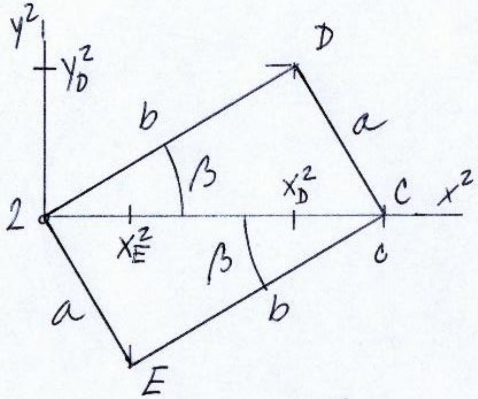
$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{u}/c & \cos\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_3 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix}} = -\frac{\sin\varphi_3}{\cos(\varphi_3-\varphi_2)} \frac{\dot{u}}{c} \qquad (7)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin\varphi_2 & \dot{u}/c \\ \cos\varphi_2 & 0 \end{vmatrix}}{-\cos(\varphi_3-\varphi_2)} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos(\varphi_3-\varphi_2)} \frac{\dot{u}}{c} \qquad (8)$$

Pro rychlosti bodů C, D, E ve tělese ② bude platit (rotační pohyb):

$$\mathbf{v}_i^1 = \dot{\mathbb{T}}^{12} \mathbf{r}_i^2 \,, \quad i = C, D, E \,;$$

Pro výpočet souřadnic bodů C, D a E v SS $(2, x^2, y^2)$ použijeme schema:



Zde

$$c = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sin\beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{c} \,,$$

takže

$$x_D^2 = b\cos\beta = \frac{b^2}{c} \,, \quad y_D^2 = b\sin\beta = \frac{ab}{c}$$

$$x_E^2 = c - \frac{b^2}{c} \,, \quad y_E^2 = -\frac{ab}{c} \,.$$

Je tedy

$$\mathbf{r}_C^2 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_D^2 = \begin{bmatrix} b^2/c \\ ab/c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_E^2 = \begin{bmatrix} c - b^2/c \\ -ab/c \\ 0 \end{bmatrix}$$

a
$$\dot{\mathbb{T}}^{12} = \dot{\varphi}_2 \begin{bmatrix} -\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 & 0 \\ \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbb{V}_C^1 = c\dot{\varphi}_2 \begin{bmatrix} -\sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{V}_D^1 = \frac{b}{c}\dot{\varphi}_2 \begin{bmatrix} -b\sin\varphi_2 - a\cos\varphi_2 \\ b\cos\varphi_2 - a\sin\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{V}_E^1 = \frac{a}{c}\dot{\varphi}_2 \begin{bmatrix} -a\sin\varphi_2 + b\cos\varphi_2 \\ a\cos\varphi_2 + b\sin\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nakonec rychlost bodu B je

$$\mathbb{V}_B^1 = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pro dosazení do (1) nyní specifikujeme síly.

$$\mathbb{F}_C^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}_D^1 = \begin{bmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{S}_7^1 = \begin{bmatrix} S_{7x} \\ S_{7y} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dosazení do (1) je pak

$$(-\mathbb{S}_7^1)\cdot\mathbb{V}_B^1 + \mathbb{F}_C^1\cdot\mathbb{V}_C^1 + \mathbb{F}_D^1\cdot\mathbb{V}_D^1 + \mathbb{S}_7^1\cdot\mathbb{V}_E^1 = 0$$

neboli

$$\begin{aligned} -S_{7x}\dot{u} - F_C c\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - F_D\frac{b}{c}\dot{\varphi}_2(b\sin\varphi_2 + a\cos\varphi_2) + \\ + S_{7x}\frac{a}{c}\dot{\varphi}_2(-a\sin\varphi_2 + b\cos\varphi_2) + \\ + S_{7y}\frac{a}{c}\dot{\varphi}_2(a\cos\varphi_2 + b\sin\varphi_2) = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Pro obecnou polohu by bylo nyní třeba prodat rovnici nositelky síly $\mathbb{S}_7$ mezi body D a B. Nás však zajímá speciální poloha podle 1. obrázku, kdy $u = 2a$ a $S_{7y} = 0$. V této poloze je dále $\sin\varphi_2 = \frac{b}{c}$, $\cos\varphi_2 = \frac{a}{c}$,

$$\sin\varphi_3 = \frac{a}{c}\,, \quad \cos\varphi_3 = \frac{b}{c}\,,$$

takže podle (7) je

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{\frac{a}{c}\cdot\frac{\dot{u}}{c}}{\frac{b}{c}\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\frac{b}{c}} = -\frac{\dot{u}}{2b}$$

a dosazení do (9) dává

$$-S_{7x}\cancel{\dot{u}} + \left(aF_C + bF_D\right)\frac{\cancel{\dot{u}}}{2b} = 0$$

a

$$S_7 = S_{7x} = \frac{aF_C + bF_D}{2b}\,.$$