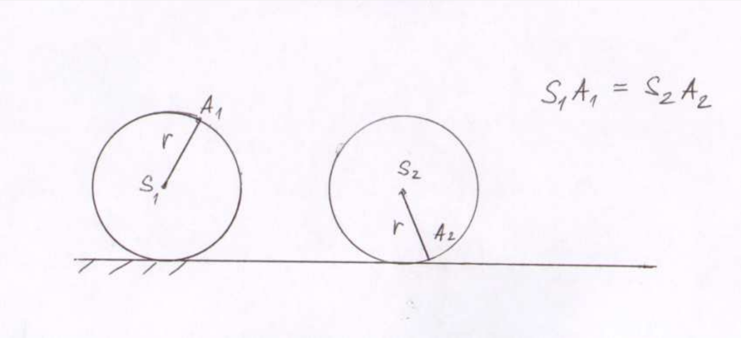
Kinematika tuhého tělesa

Pohyb tělesa v rovině a v prostoru, posuvný a rotační pohyb

Úvod

Tuhé těleso - definice

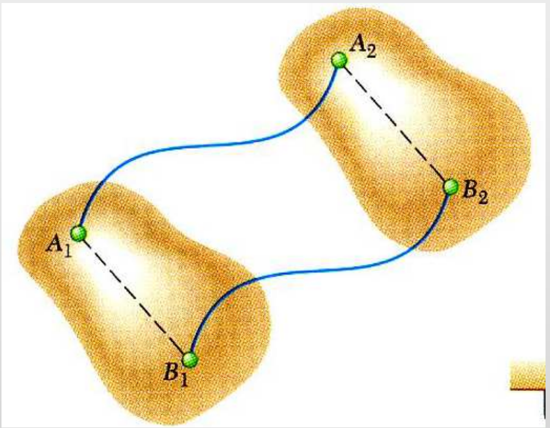
- všechny body tělesa mají stálé vzájemné vzdálenosti
- těleso se nedeformuje, nemění tvar
- počet stupňů volnosti tělesa v Euklidovském prostoru je i = 6°
- Typy pohybů v rovině (2D):
    - posuvný
    - rotační
    - obecný rovinný (ORP)
- Pohyby v prostoru (3D)
    - sférický
    - šroubový pohyb
    - obecný prostorový

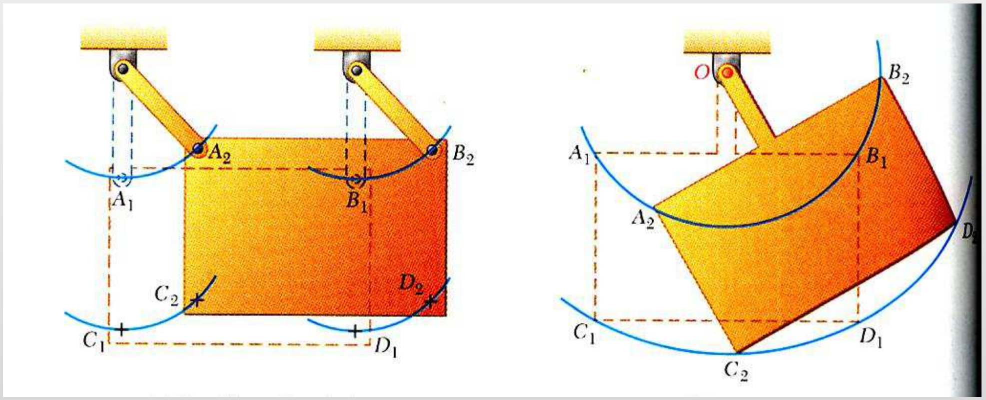


Posuvný pohyb tělesa

- definice: 2 nerovnoběžné přímky nemění svůj směr
- trajektorie všech bodů jsou shodné navzájem posunuté křivky
- v každém okamžiku jsou rychlosti a zrychlení všech bodů těles navzájem stejné
- existují dva pohyby: přímočarý posuvný

  křivočarý posuvný





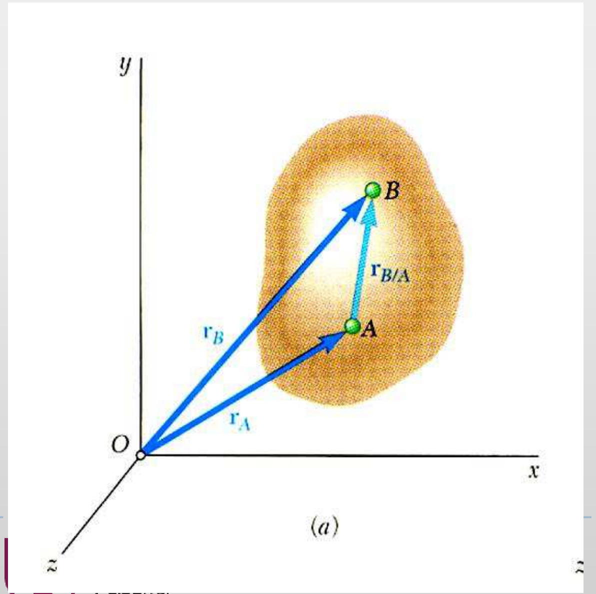
posuvný křivočarý rotační

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Posuvný pohyb – kinematika

- Posuvný pohyb je určen pohybem jednoho bodu
- dva body tuhého tělesa A, B
- polohový vektor bodu B je dán rovnicí $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$ (1)
- $\vec{r}_{BA}$ má konstantní směr i velikost, $\vec{v}_{BA} = \dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{0}$
- rychlost je dána derivací vektorové rovnice (1)
- $$\boxed{\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_A}$$
- zrychlení je dáno derivací $\vec{v}_B$

$$\boxed{\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \vec{a}_A}$$

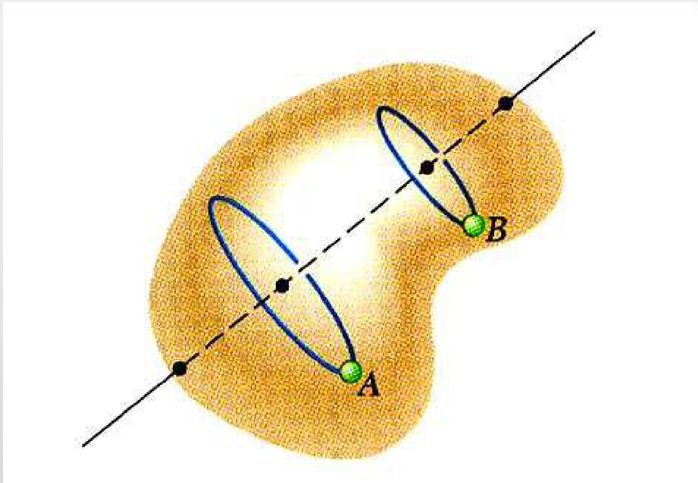


Posuvný pohyb – kinematika

- Pokud všechny body tělesa mají v daném okamžiku pohybu shodné kinematické veličiny, pak stačí určit kinematické veličiny 1 bodu (rychlost a zrychlení)
- k výpočtu použijeme vztahy pro přímočarý resp. křivočarý pohyb

Rotační pohyb tělesa

- jedna přímka tělesa zůstává trvale v klidu = **osa rotace**
- (otáčivý pohyb – osa otáčení)
- trajektorie všech bodů jsou kružnice ležící v rovinách kolmých k ose rotace a mají střed na této ose, soustředné kružnice
- rotační pohyb je pohybem rovinným (vyšetřujeme v rovině kolmé k ose rotace)



Rotační pohyb – kinematika

- rotační pohyb je určen úhlem φ

$$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$$

- úhlová rychlost [s^{-1}]

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}}$$

- úhlové zrychlení [s^{-2}]

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\varphi}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathrm{d}\left(\omega^2\right)}{2\mathrm{d}\varphi} = \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}}$$

Rotační pohyb – pohyb obecného bodu

- Pohyb obecného bodu A tělesa vyjádříme v souřadnicovém systému základního prostoru (0,x,y) s pomocí souřadnic bodu A v prostoru tělesa (0,ξ,η). Uvažujeme, že počátek obou souřadnicových systémů je shodný.
- $\boxed{\varphi = \varphi(t)}$ určuje pohyb tělesa.

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi, \\ y &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi, \end{aligned} \qquad (1)$$

Rotační pohyb – pohyb obecného bodu

- Rychlost obecného bodu A má složky

$$v_x = -(\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\dot{\varphi},$$
$$v_y = (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\dot{\varphi},$$

- Zrychlení obecného bodu

$$a_x = -(\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\ddot{\varphi} - (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\dot{\varphi}^2,$$
$$a_y = (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\ddot{\varphi} - (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\dot{\varphi}^2.$$

- kde $\dot{\varphi} = \omega$ je úhlová rychlost
- $\ddot{\varphi} = \alpha = \dot{\omega}$ je úhlové zrychlení

Rotační pohyb -rotace kolem pevné osy vektorové vyjádření

- Úhel pootočení, úhlová rychlost a úhlové zrychlení – jsou vektory ležící na ose rotace

$$\vec{\varphi} = \varphi \vec{e}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi} \vec{e}$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}} = \dot{\omega} \vec{e} = \ddot{\varphi} \vec{e}$$

$\vec{e}$ je jednotkový vektor na ose o, orientovaný tak, že při pohledu proti němu se jeví narůstání úhlu v kladném smyslu (proti smyslu chodu hodinových ručiček

- Rychlost bodu rotujícího tělesa

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(z\omega_y - y\omega_z\right)\vec{i} + \left(x\omega_z - z\omega_x\right)\vec{j} + \left(y\omega_x - x\omega_y\right)\vec{k}$$

Rotační pohyb – rotace kolem pevné osy

- Je-li osa otáčení totožná s osou z (rovinný případ), platí

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}$$

- <u>Zrychlení bodu rotujícího tělesa</u>

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

- kde $\vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{a}_t$ je tečné zrychlení

  $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$ je normálové zrychlení

Rotační pohyb – rotace kolem pevné osy

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}}$$

- Složky vektoru zrychlení vyjádříme obdobně jako u rychlosti: :

$$a_t = \vec{\alpha}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(z\alpha_y - y\alpha_z\right)\vec{i} + \left(x\alpha_z - z\alpha_x\right)\vec{j} + \left(y\alpha_x - x\alpha_y\right)\vec{k}$$

$$a_n = \vec{\omega}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(v_z\omega_y - y\omega_z\right)\vec{i} + \left(v_x\omega_z - z\omega_x\right)\vec{j} + \left(v_y\omega_x - x\omega_y\right)\vec{k}$$

Rotační pohyb – rotace kolem pevné osy

- Je-li osa otáčení totožná s osou z (rovinný případ), platí

$$a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (-y\alpha_z)\vec{i} + (x\alpha_z)\vec{j}$$

$$a_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = (-v_y\omega)\vec{i} + (v_x\omega)\vec{j}$$

Kinematika rotačního pohybu v maticovém vyjádření

- Rovinný případ: vyjdeme z rovnic (1) pro analytické vyjádření polohy bodu rotujícího těles
- $$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{T}\boldsymbol{\rho}}$$
- kde $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ je polohový vektor bodu v základním prostoru,
- $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ je polohový vektor bodu v prostoru tělesa,
- $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ je transformační matice rotačního pohybu

Kinematika rotačního pohybu v maticovém vyjádření

- Rychlost je dána derivací polohového vektoru
- $$\boxed{\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{T}}\boldsymbol{\rho}}$$
- kde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ je vektor rychlosti bodu v základním prostoru,

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}\omega$$

- Zrychlení je dáno derivací vektoru rychlosti

$$\boxed{\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{T}}\boldsymbol{\rho}}$$

- $$\ddot{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\omega^2 + \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}\alpha$$