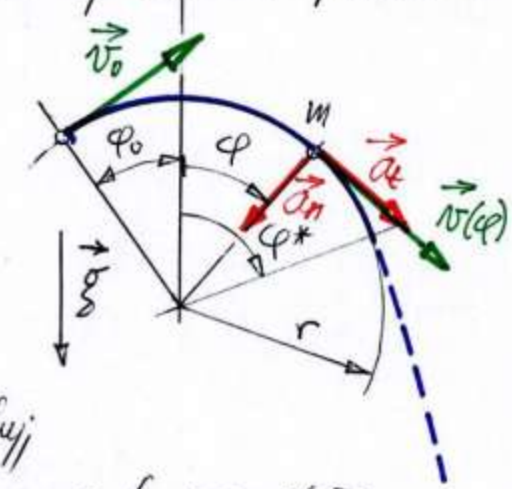
Příklad 3.2. Pohyb hmotného bodu po podpůrné válcové ploše.

Hmotný bod dané hmotnosti se pohybuje po vnější drsné straně horizontální válcové plochy v radiální rovině z dané výchozí polohy danou počáteční rychlostí.



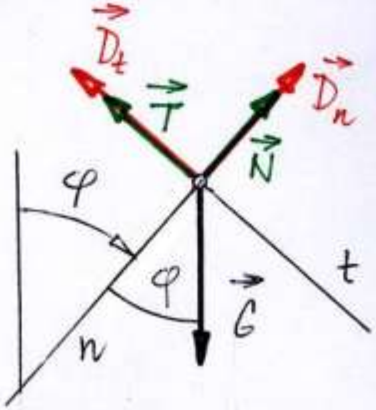
Dáno:

- hmotnost m HB;
- výchozí poloha φ_0;
- poč. rychlost v_0;
- poloměr r válc. plochy;
- koef. smykového tření f na ploše.

Určit:

- závislost $v(\varphi)$ rychlosti na poloze;
- pro spec. případ $f=0$ místo φ^* ztráty kontaktu HB s podložkou.

Řešení:



1. Uvolnění v obecné poloze obsahuje akční sílu $\vec{G}$ (tíha), normálovou reakci $\vec{N}$, tečnou třecí sílu $\vec{T}$ proti pohybu a tečnou $\vec{D}_t$ a normálovou $\vec{D}_n$ složku setrvačné síly.
2. Vektorovou rovnici rovnováhy

$$\vec{G}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{D}_t+\vec{D}_n=\vec{0}$$

rozepíšeme ve složkách SS tečna, normála

$$t:\quad G\sin\varphi - T - D_t = 0, \qquad (1)$$

$$n:\quad G\cos\varphi - N - D_n = 0. \qquad (2)$$

3. Specifikace sil

$$G = mg\,,\quad T = fN\,,\quad D_t = ma_t \qquad (3,4,5)$$

$$D_n = ma_n. \qquad (6)$$

4. Kinematické rovnice. Protože se požaduje závislost v na φ, musíme použít diferenciální výraz, který obsahuje v a φ. Tím je

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{r\,dv}{r\,d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v\,dv}{r\,d\varphi}. \quad (7)$$

Pro normálovou složku zrychlení platí

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \quad (8)$$

5. Inventura rovnic a neznámých.

Rovnic: 8,

Neznámých: 8 ($G, T, D_t, D_n, N, a_t, a_n, v$).

6. Řešení:

Dosazením rovnic (3) až (6) do (1) a (2) dostaneme

$$mg\sin\varphi - fN - ma_t = 0 \quad (9)$$

$$mg\cos\varphi - N - ma_n = 0. \quad (10)$$

Z (10) vypočteme N a dosadíme do (9)

$$mg\sin\varphi - f(mg\cos\varphi - ma_n) - ma_t = 0$$

Krátíme hmotnost a dosadíme za a_t a a_n.

$$\frac{v\,dv}{r\,d\varphi} - f\frac{v^2}{r} = g\sin\varphi - fg\cos\varphi. \quad (11)$$

Substitucí

$$v^2 = z \quad (12)$$

$$2v\,dv = dz$$

se tato rovnice převede na <u>lineární diferenciální rovnici 1. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.</u>

$$\frac{dz}{d\varphi} - 2fz = 2rg\sin\varphi - 2frg\cos\varphi. \quad (13)$$

Řešení takové rovnice se skládá

z obecného řešení $z_H(\varphi)$ homogenní rovnice

$$\frac{dz_H}{d\varphi} - 2f z_H = 0 \qquad (14)$$

a z řešení $z_P(\varphi)$ partikulárního pro daný tvar pravé strany.

Řešení rovnice (14) předpokládáme ve tvaru $z_H = e^{\lambda\varphi}$,

což po dosazení vede na charakteristickou rovnici

$$\lambda - 2f = 0 \qquad (15)$$

s řešením $\lambda = 2f$,

takže obecné řešení rovnice (14) je

$$z_H = C e^{2f\varphi},$$

kde C je integrační konstanta.

Speciální pravá strana rovnice (13) obsahuje sinus i cosinus neznámé proměnné, oba s konstantními koeficienty.

Srovnání s nejobecnější možnou tvarem speciální pravé strany

$$e^{a\varphi}\left[P(\varphi)\cos b\varphi + Q(\varphi)\sin b\varphi\right]$$

vychází $a=0$, $b=1$ a stupeň polynomů P i Q je $n=0$. Protože číslo $a+ib = i$ není kořenem rovnice (15) je očekávaný tvar partikulárního integrálu

$$z_P = R_0 \cos\varphi + S_0 \sin\varphi .$$

Dosazení do rovnice (13) dává

$$(-R_0 - 2fS_0)\sin\varphi + (S_0 - 2fR_0)\cos\varphi = $$
$$= 2gr\sin\varphi - 2fgr\cos\varphi .$$

Porovnáním členů u $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$

dostáváme dvě lineární rovnice

$$R_0 + 2fS_0 = -2gr$$
$$2fR_0 - S_0 = 2fgr$$

pro R_0 a S_0. Řešení např. Cramerovým pravidlem dává

$$R_0 = \frac{\begin{vmatrix} -2gr & 2f \\ 2fgr & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2f \\ 2f & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1-2f^2}{1+4f^2}2gr,$$

$$S_0 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2gr \\ 2f & 2fgr \end{vmatrix}}{1+4f^2} = -\frac{6fgr}{1+4f^2}.$$

Partikulární integrál je pak

$$z_p = \frac{2gr}{1+4f^2}\left[(2f^2-1)\cos\varphi - 3f\sin\varphi\right]$$

a obecné řešení úplné rovnice (13)

$$z(\varphi) = Ce^{2f\varphi} - \frac{2gr}{1+4f^2}\left[(1-2f^2)\cos\varphi + 3f\sin\varphi\right].$$

Integrační konstanta C se určí z poč. podmínky

$$\varphi = -\varphi_0, \quad v = v_0, \quad z = v_0^2.$$

Vychází

$$C = e^{2f\varphi_0}\left\{v_0^2 + \frac{2gr}{1+4f^2}\left[(1-2f^2)\cos\varphi_0 - 3f\sin\varphi_0\right]\right\}.$$

Po zpětném dosazení a úpravě je

$$z(\varphi) = v^2(\varphi) = v_0^2 e^{2f(\varphi+\varphi_0)} +$$
$$+ \frac{2gr}{1+4f^2}\left[(1-2f^2)\left(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\cos\varphi_0 - \cos\varphi\right) - \right.$$
$$\left. - 3f\left(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\sin\varphi_0 + \sin\varphi\right)\right].$$

Normálná reakce N je potom z rovnice (10)

$$N = m\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{r}\right),$$

kde

$$N = m\left\{ g\cos\varphi - \frac{v_0^2}{r} e^{2f(\varphi+\varphi_0)} - \right.$$

$$- \frac{2g}{1+4f^2}\left[(1-2f^2)\left(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\cos\varphi_0 - \cos\varphi\right) - \right.$$

$$\left.\left. - 3f\left(e^{2f(\varphi+\varphi_0)}\sin\varphi_0 + \sin\varphi\right)\right]\right\}.$$

<u>Ztráta kontaktu</u> s podložkou nostává, když $N=0$. Obecný případ pro $f \neq 0$ má řešení obtížné. Pro speciální případ $f=0$ je

$$N(\varphi) = m\left[g\cos\varphi - \frac{v_0^2}{r} - 2g\left(\cos\varphi_0 - \cos\varphi\right)\right]$$

a podmínka

$$N(\varphi^*) = 0$$

pro ztrátu kontaktu vede na rovnici

$$0 = 3g\cos\varphi^* - \frac{v_0^2}{r} - 2g\cos\varphi_0 .$$

Z toho

$$\varphi^* = \arccos\left(\frac{v_0^2}{3gr} + \frac{2}{3}\cos\varphi_0\right).$$