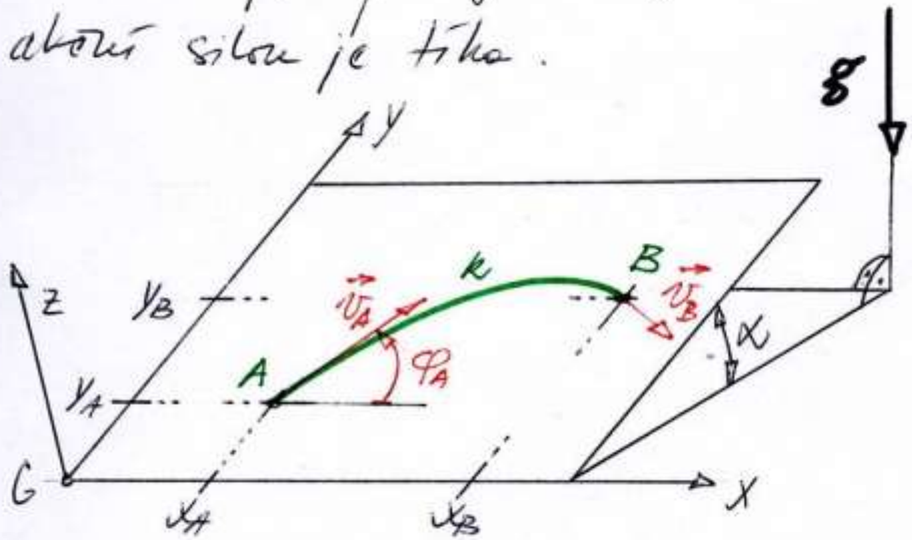
Příklad 3.1. Pohyb hmotného bodu v ukloněné rovině.

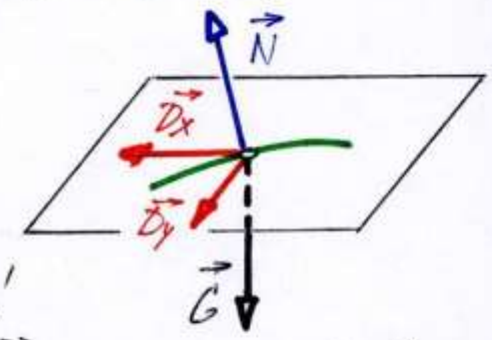
Hmotný bod dané hmotnosti se má bez tření pohybovat v rovině (x,y) ukloněné o daný úhel vůči vektoru tíhového zrychlení z dané polohy A do dané polohy B. Jedinou působící akční silou je tíha.



Dáno: - hmotnost m hmotného bodu;
- úklon α roviny (x,y);
- souřadnice x_A, y_A $(, z_A=0)$ polohy A;
- souřadnice x_B, y_B $(, z_B=0)$ polohy B;
- absolutní hodnota rychlosti v_B hmotného bodu v poloze B.

Určit: - trajektorii k hmotného bodu;
- absolutní hodnotu v_A rychlosti $\vec{v}_A$ v poloze A;
- úhel φ_A vektoru $\vec{v}_A$ vůči ose x.

Řešení:



1. uvolnění HB v obecné poloze. Zahrnuje akční sílu $\vec{G}$, reakci $\vec{N}$ podpůrné plochy a složky D_x, D_y dynamické síly pro pohyb v rovině (x,y).

2. rovnice dynamické rovnováhy

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{D}_x + \vec{D}_y = \vec{0}$$

resp. ve složkách SS x,y,z:

$x: \quad -D_x = 0 \qquad (1)$

$y: \quad -G\sin\alpha - D_y = 0 \qquad (2)$

$z: \quad N - G\cos\alpha = 0 \qquad (3).$

3. specifikace sil se týká G, D_x, D_y:

$$G = mg, \quad D_x = ma_x, \quad D_y = ma_y \qquad (4,5,6)$$

4. kinematické rovnice jsou

$$a_x = \dot{v}_x, \quad v_x = \dot{x}, \qquad (7,8)$$

$$a_y = \dot{v}_y, \quad v_y = \dot{y}, \qquad (9,10)$$

$$v_A = \sqrt{v_x^2(x_A, y_A) + v_y^2(x_A, y_A)}, \qquad (11)$$

$$\varphi_A = \operatorname{arctg} \frac{v_y(x_A, y_A)}{v_x(x_A, y_A)}, \qquad (12)$$

$$v_B = \sqrt{v_x^2(x_B, y_B) + v_y^2(x_B, y_B)}. \qquad (13)$$

5. inventura rovnic a neznámých:

rovnic je 13,

neznámých je 13 ($D_x, D_y, G, N, a_x, a_y, v_x, v_y,$
$x, y, v_A, \varphi_A, v_B$).

6. řešení:

z rovnic (1) a (5): $a_x = 0$,

takže z rovnic (7) a (8)

$$dv_x = 0 \Rightarrow \int_{v_{xA}}^{v_x} dv_x = 0 \Rightarrow v_x = v_{xA} = \text{konst.} \qquad (14)$$

$$dx = v_{xA}\,dt \Rightarrow \int_{x_A}^{x} dx = v_{xA}\int_0^t dt \Rightarrow x = x_A + v_{xA}t.$$

Dále z rovnic (2) a (6):

$$a_y = -g\sin\alpha,$$

takže z rovnic (9) a (10)

$$dv_y = -g\sin\alpha\,dt \Rightarrow v_y - v_{yA} = -g\sin\alpha\, t,$$

$$dy = (v_{yA} - g\sin\alpha\, t)\,dt$$

$$y - y_A = v_{yA}t - \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2.$$

Výsledné rovnice

$$x = x_A + v_{xA} t$$

$$y = y_A + v_{yA} t - \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t^2$$

představují parametrické vyjádření trajektorie k hmotného bodu. Pro určení závislostí $y(x)$ a $v_y(x)$ vyloučíme parametr t:

$$t = \frac{x - x_A}{v_{xA}} , \quad v_y = v_{yA} - g \sin\alpha \frac{x - x_A}{v_{xA}} , \qquad (15)$$

$$y = y_A + \frac{v_{yA}}{v_{xA}}(x - x_A) - \frac{g}{2} \sin\alpha \frac{(x - x_A)^2}{v_{xA}^2} . \qquad (16)$$

Poznámka: Úlohu lze řešit přímo bez parametru t. Použijeme-li místo (9) rovnici

$$a_y = \frac{dv_y}{dx} v_x = \frac{dv_y}{dx} v_{xA} ,$$

bude

$$\frac{dv_y}{dx} = - \frac{g \sin\alpha}{v_{xA}} ;$$

separací a integrací

$$\int_{v_{yA}}^{v_y} dv_y = - \frac{g \sin\alpha}{v_{xA}} \int_{x_A}^{x} dx$$

dostaneme

$$v_y = v_{yA} - g \sin\alpha \frac{x - x_A}{v_{xA}} . \qquad (15)$$

Dále napíšeme místo (10)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} v_x = \frac{dy}{dx} v_{xA} ,$$

takže

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_{xA}} = \frac{v_{yA}}{v_{xA}} - g \sin\alpha \frac{x - x_A}{v_{xA}^2}$$

a po separaci a integraci

$$\int_{y_A}^{y} dy = \frac{v_{yA}}{v_{xA}} \int_{x_A}^{x} dx - \frac{g \sin\alpha}{v_{xA}^2} \int_{x_A}^{x} (x - x_A)\, dx$$

dostáváme výsledek

$$y = y_A + \frac{v_{yA}}{v_{xA}}(x - x_A) - \frac{g}{2}\sin\alpha\left(\frac{x - x_A}{v_{xA}}\right)^2, \quad (16)$$

stejný jako výše.

Nyní můžeme vypočítat parametry dráhy v poloze B. Podle (15) je

$$v_{yB} = v_y(x_B) = v_{yA} - g\sin\alpha\,\frac{x_B - x_A}{v_{xA}}$$

a podle (14)

$$v_{xB} = v_{xA},$$

takže

$$v_B^2 = v_{xB}^2 + v_{yB}^2 = v_{xA}^2 + \left(v_{yA} - g\sin\alpha\,\frac{x_B - x_A}{v_{xA}}\right)^2,$$

po úpravě

$$v_B^2 = v_{xA}^2 + v_{yA}^2 - 2g\sin\alpha\,(x_B - x_A)\,\frac{v_{yA}}{v_{xA}} + g^2\sin^2\alpha\left(\frac{x_B - x_A}{v_{xA}}\right)^2. \quad (17)$$

Dále podle (16)

$$y_B = y(x_B) = y_A + (x_B - x_A)\,\frac{v_{yA}}{v_{xA}} - \frac{g}{2}\sin\alpha\left(\frac{x_B - x_A}{v_{xA}}\right)^2. \quad (18)$$

Rovnice (17) a (18) tvoří nyní soustavu pro v_{xA}, v_{yA}, resp. pro hledané veličiny

$$v_A = \sqrt{v_{xA}^2 + v_{yA}^2}, \quad \varphi_A = \operatorname{arctg}\frac{v_{yA}}{v_{xA}}.$$

Vynásobíme-li rovnici (18) členem $2g\sin\alpha$, dostaneme

$$2g\sin\alpha\,(y_B - y_A) = 2g\sin\alpha\,(x_B - x_A)\,\frac{v_{yA}}{v_{xA}} - g^2\sin^2\alpha\left(\frac{x_B - x_A}{v_{xA}}\right)^2$$

a po sečtení se (17)

$$v_B^2 + 2g\sin\alpha\,(y_B - y_A) = v_{xA}^2 + v_{yA}^2 = v_A^2, \quad (19)$$

takže

$$v_A = \sqrt{v_B^2 + 2g\sin\alpha\,(y_B - y_A)}.$$

Protože $\frac{v_{yA}}{v_{xA}} = \operatorname{tg}\varphi_A$,

můžeme rovnice (18) a (19) přepsat jako

$$y_B - y_A = (x_B - x_A)\operatorname{tg}\varphi_A - \frac{g}{2}\sin\alpha\frac{(x_B - x_A)^2}{v_{xA}^2},$$

$$v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A) = v_{xA}^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_A).$$

Vypočteme v_{xA}^2 ze druhé rovnice a dosadíme do první. Dostaneme

$$y_B - y_A = (x_B - x_A)\operatorname{tg}\varphi_A - \frac{g\sin\alpha(x_B - x_A)^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_A)}{2[v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A)]}.$$

To je kvadratická rovnice pro $\operatorname{tg}\varphi_A$ ve tvaru

$$g\sin\alpha(x_B - x_A)^2\operatorname{tg}^2\varphi_A - 2[v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A)](x_B - x_A)\operatorname{tg}\varphi_A$$
$$+ g\sin\alpha(x_B - x_A)^2 + 2[v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A)](y_B - y_A) = 0$$

Řešení je

$$(\operatorname{tg}\varphi_A)_{1,2} = \frac{2[v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A)](x_B - x_A) \pm \sqrt{D}}{2g\sin\alpha(x_B - x_A)^2},$$

kde diskriminant

$$D = 4[v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A)]^2(x_B - x_A)^2 - 4g\sin\alpha\cdot$$
$$\cdot(x_B - x_A)^2\left\{g\sin\alpha(x_B - x_A)^2 + 2[v_B^2 + 2g\sin\alpha(y_B - y_A)](y_B - y_A)\right\}.$$

Úloha je tedy dvojznačná a existují dvě možné trajektorie z bodu A do bodu B podle obrázku. Vektory $\vec{v}_A, \vec{v}_A'$ a $\vec{v}_B, \vec{v}_B'$ se liší směrem, nikoliv velikostí: