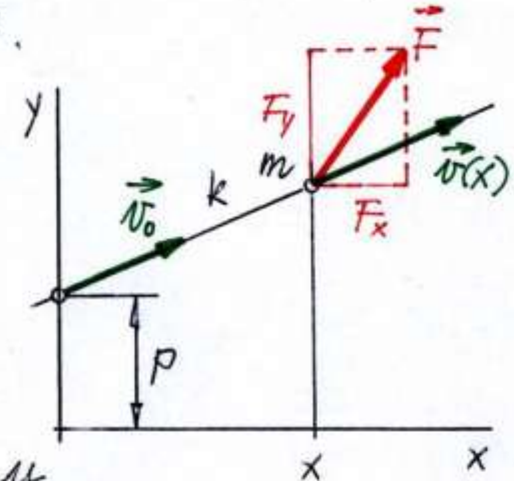
Příklad 5.1. Dynamika hmotného bodu použitím "vět".

Hmotný bod o dané hmotnosti se pohybuje v daném silovém poli po dané trajektorii.



Dáno:

- hmotnost m HB;
- silové pole $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$,

$$F_x = F_0 \frac{x}{y}, \quad F_y = F_0 \frac{y}{qx - y};$$

- konstanty F_0, p, q;
- trajektorie k HB

$$k: \; y = p + qx;$$

- počáteční rychlost HB

$$v(0) = v_0;$$

Určete:

1. Je dané silové pole potenciální?
2. Je-li potenciální, určete potenciální energii $V(x,y)$;
3. Určete závislost $v(x)$ rychlosti HB na okamžité poloze.

Řešení:

ad1) Silové pole je potenciální, když

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

V daném případě

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -F_0 \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -F_0 \frac{qy}{(qx-y)^2}$$

takže

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

a silové pole <u>potenciální není</u>.

ad2) Pro nepotenciální pole <u>potenciální energie neexistuje</u>.

ad3) Pro výpočet rychlosti nelze proto použít Z.Z.M.E, ale musí se použít Věta o změně kinetické energie.

$$K - K_0 = \oint_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad .$$

Po dosazení za K, K_0, $\vec{F}$ a $d\vec{r}$ máme

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \oint_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (F_x dx + F_y dy). \qquad (1)$$

Integrační křivka je přímka

$$y = p + qx \,, \quad dy = q dx \,.$$

Po dosazení integrační křivky přejde křivkový integrál na obyčejný nad intervalem $(0, x)$:

$$\oint_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (F_x dx + F_y dy) = F_0 \int_0^x \left(\frac{x dx}{p+qx} + \frac{p+qx}{-p} q dx \right)$$

Integrál na pravé straně rozdělíme na dva a řešíme samostatně.

$$\int_0^x \frac{x dx}{p+qx} = \left| \begin{matrix} p+qx = u \\ q dx = du \\ x=0: u=p \end{matrix} \right| = \frac{1}{q^2} \int_p^{p+qx} \frac{u-p}{u} du =$$

$$= \frac{1}{q^2} \int_p^{p+qx} \left(1 - \frac{p}{u}\right) du = \frac{1}{q^2} \Big[u - p \ln u \Big]_p^{p+qx} =$$

$$= \frac{1}{q^2} \left(\cancel{p} + qx - \cancel{p} - p \ln \frac{p+qx}{p} \right) =$$

$$= \frac{1}{q} \left[x - \frac{p}{q} \ln\left(1 + \frac{q}{p} x\right) \right].$$

$$\int_0^x \frac{p+qx}{-p} q dx = -q \int_0^x \left(1 + \frac{q}{p} x\right) dx =$$

$$= -q \left(x + \frac{q}{2p} x^2 \right) = -qx \left(1 + \frac{qx}{2p} \right)$$

Nakonec dosazením do (1)

$$v^2(x) = v_0^2 + \frac{2F_0}{qm} \left[x - \frac{p}{q} \ln\left(1 + \frac{qx}{p}\right) \right] - \frac{2F_0}{m} qx \left(1 + \frac{qx}{2p} \right).$$