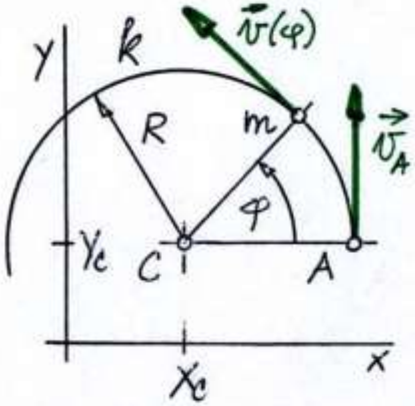
Příklad 5.2. Dynamika hmotného bodu použitím "vět".

Hmotný bod o dané hmotnosti se pohybuje v daném silovém poli po dané trajektorii.



Dáno:

- hmotnost m HB;
- trajektorie k HB: x_c, y_c, R;
- konstanta F_0;
- silové pole $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$, $F_x = -F_0R\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)$, $F_y = F_0R\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)$;
- počáteční rychlost $v(0) = v_A$;

Určit:

1. Je dané silové pole potenciální?
2. Je-li potenciální, určit potenciální energii $V(x,y)$;
3. Závislost $v(\varphi)$ rychlosti HB na okamžité poloze φ.

Řešení:

ad 1) Silové pole je potenciální, když

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

V daném případě je

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = F_0R\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right), \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = F_0R\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right),$$

takže skutečně

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

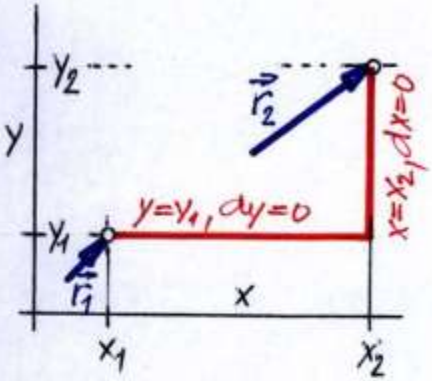
a dané silové pole je potenciální.

ad 2) Pro výpočet potenciální energie použijeme definiční vztah

$$V_2 - V_1 = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad (1)$$

přičemž integrovat se může podél

libovolné křivky. Nejčastěji se volí lomená dráha podle obrázku. Pak lze napsat



$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F\cdot d\vec r = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\left(F_x dx + F_y dy\right) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x(x,y_1)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y(x_2,y)\,dy\,.$$

V daném případě

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r = -F_0R\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{y_1}{x^2}+\frac{1}{y_1}\right)dx + F_0R\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{x_2}{y^2}+\frac{1}{x_2}\right)dy =$$

$$= -F_0R\left[-\frac{y_1}{x}+\frac{x}{y_1}\right]_{x_1}^{x_2} + F_0R\left[-\frac{x_2}{y}+\frac{y}{x_2}\right]_{y_1}^{y_2} =$$

$$= F_0R\left(\cancel{\frac{y_1}{x_2}} - \cancel{\frac{x_2}{y_1}} - \frac{y_1}{x_1} + \frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} + \frac{y_2}{x_2} + \cancel{\frac{x_2}{y_1}} - \cancel{\frac{y_1}{x_2}}\right).$$

Dosazení do (1) pak je

$$V_2 - V_1 = F_0R\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{y_2}{x_2}\right) - F_0R\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{y_1}{x_1}\right)$$

Srovnáním indexů na obou stranách rovnice dostáváme

$$V_2 = V(\vec r_2) = V(x_2,y_2) = F_0R\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{y_2}{x_2}\right)$$

$$V_1 = V(\vec r_1) = V(x_1,y_1) = F_0R\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{y_1}{x_1}\right),$$

takže obecný výraz pro potenciální energii v obecném bodě je

$$V(x,y) = F_0R\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$$

ad 3) Pro výpočet rychlosti teď můžeme použít zákon zachování mechanické energie psaný pro běžný bod a výchozí bod A

$$K_A + V_A = K + V$$

tj.

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + V(x_A, y_A) = \frac{1}{2} m v^2 + V(x, y),$$

$$v^2 = v_A^2 + \frac{2}{m}\left[V(x_A, y_A) - V(x, y)\right]. \qquad (2)$$

Na dané kruhové trajektorii je

$x_A = x_c + R, \quad y_A = y_c;$

$x = x_c + R\cos\varphi, \quad y = y_c + R\sin\varphi,$

takže

$$V(x_A, y_A) = F_0 R\left(\frac{x_c + R}{y_c} - \frac{y_c}{x_c + R}\right),$$

$$V(x, y) = F_0 R\left(\frac{x_c + R\cos\varphi}{y_c + R\sin\varphi} - \frac{y_c + R\sin\varphi}{x_c + R\cos\varphi}\right).$$

Po dosazení do (2) máme výsledek

$$v^2 = v_A^2 + 2\frac{F_0 R}{m}\left(\frac{x_c + R}{y_c} - \frac{y_c}{y_c + R} - \frac{x_c + R\cos\varphi}{y_c + R\sin\varphi} + \frac{y_c + R\sin\varphi}{x_c + R\cos\varphi}\right).$$