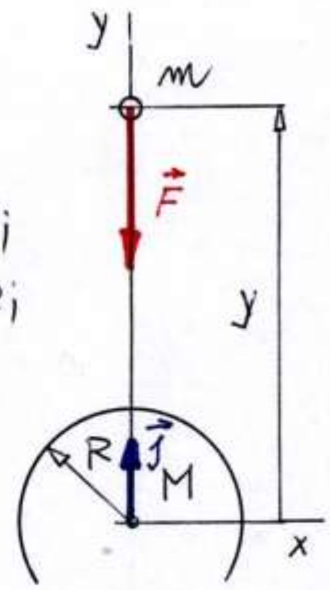
Příklad 5.4. Gravitační silové pole.

Určete potenciální energii gravitačního silového pole. Výsledek aplikujte na pohyb kosmické sondy po přímkové dráze mezi Zemí a Měsícem.

Dáno:

- hmotnost sondy m;
- hmotnost M a poloměr R Země;
- hmotnost $\bar{M}$ a poloměr $\bar{R}$ Měsíce;
- vzdálenost a Měsíce od Země;
- Newtonův gravitační zákon pro přitažlivou sílu dvou hmotných bodů
$$\vec{F} = -\varkappa \frac{mM}{y^2}\vec{j};$$
- gravitační konstanta $\varkappa$;



Řešení:

Gravitační silové pole je
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j},$$
kde
$$F_x = 0\ , \quad F_y = -\varkappa\frac{mM}{y^2}.$$
Protože
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$
je toto silové pole potenciální s potenciální energií vypočtenou z definice
$$V_2 - V_1 = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \qquad (1)$$
V daném případě je
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy = -\varkappa mM \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2} =$$
$$= -\varkappa mM\left[-\frac{1}{y}\right]_{y_1}^{y_2} = -\varkappa mM\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right).$$

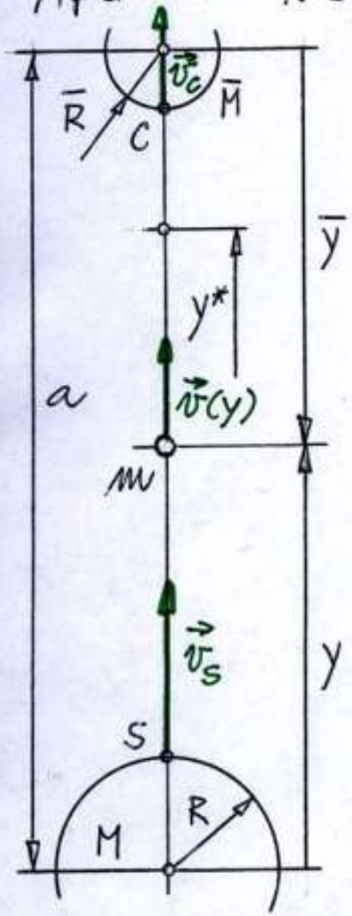
Dosazením do (1) dostaneme.

$$V_2 - V_1 = \varkappa m M\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right) = -\varkappa\frac{mM}{y_2} - \left(-\varkappa\frac{mM}{y_1}\right),$$

takže obecně

$$V(y) = -\varkappa\frac{mM}{y}.$$

Aplikace na sondu mezi Zemí a Měsícem má určit:



- závislost $v(y)$ rychlosti na poloze;
- polohu y^* minimální rychlosti sondy;
- minimální startovací rychlost $v_{S\min}$ sondy;
- minimální rychlost $v_{C\min}$ nebrzděného pádu na Měsíc.

Řešení:

Podle zákona zachování mechanické energie je součet kinetické a potenciální energie konstantní. V daném případě je potenciální energie součtem potenciální energie V Země a potenciální energie $\bar{V}$ Měsíce. Tedy

$$K + V + \bar{V} = \text{konst.} \qquad (2)$$

Podle předchozího výsledku bude

$$V = V(y) = -\varkappa\frac{mM}{y}$$

a

$$\bar{V} = \bar{V}(\bar{y}) = -\varkappa\frac{m\bar{M}}{\bar{y}} = -\varkappa\frac{m\bar{M}}{a-y}.$$

Aplikací (2) na startovací bod S a na bod běžný dostaneme

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \varkappa\cancel{m}\left(\frac{M}{y}+\frac{\bar{M}}{a-y}\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_S^2 - \varkappa\cancel{m}\left(\frac{M}{R}+\frac{\bar{M}}{a-R}\right),$$

Z toho vypočteme

$$v^2 = v_S^2 - 2\kappa\left(\frac{M}{R} - \frac{M}{y} + \frac{\bar M}{a-R} - \frac{\bar M}{a-y}\right)$$

resp.

$$v^2 = v_S^2 - 2\kappa M\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{y} - \frac{\bar M}{M}\left(\frac{1}{a-y} - \frac{1}{a-R}\right)\right] \quad (3)$$

Součin κM se obvykle vyjadřuje pomocí poloměru R Země a tíhového zrychlení g na povrchu Země na základě úvahy, že Newtonova gravitační síla je zde rovna tíze. Tedy v absolutních hodnotách

$$\cancel{m}g = \kappa \frac{\cancel{m}M}{R^2}$$

Z toho $\kappa M = gR^2$.

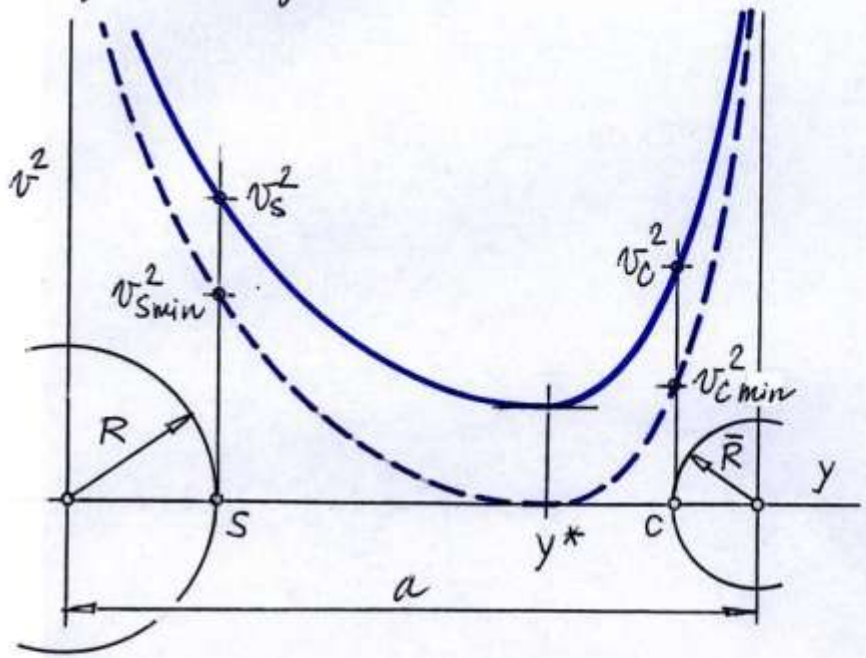
Dosazením do (3) dostaneme tedy nakonec

$$v^2(y) = v_S^2 - 2gR\left[1 - \frac{R}{y} - \frac{\bar M}{M}\left(\frac{R}{a-y} - \frac{R}{a-R}\right)\right] \quad (4)$$

Grafem křivky

$$v^2 = v^2(y)$$

je součet dvou hyperbol s asymptotami pro $y = 0$ a $y = a$.



Dosazením $y = a - \bar R$ dostaneme pro cílovou rychlost

$$v_C^2 = v_S^2 - 2gR\left[1 - \frac{R}{a-\bar R} - \frac{\bar M}{M}\left(\frac{R}{\bar R} - \frac{R}{a-R}\right)\right]. \quad (5)$$

Polohu y^* minimální rychlosti

dostaneme z podmínky

$$\frac{dv}{dy}=0 .$$

Implicitním derivováním (4) podle y

$$2v\frac{dv}{dy}=-2gR\left[\frac{R}{y^2}-\frac{\bar{M}}{M}\frac{R}{(a-y)^2}\right].$$

Pro $dv/dy=0$ dostáváme pro y^* rovnici

$$0=\frac{1}{y^{*2}}-\frac{\bar{M}}{M}\frac{1}{(a-y^*)^2}$$

resp.

$$(a-y^*)^2-\frac{\bar{M}}{M}y^{*2}=0 .$$

To je kvadratická rovnice

$$\left(1-\frac{\bar{M}}{M}\right)y^{*2}-2ay^*+a^2=0$$

s řešením

$$y^*_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4\left(1-\frac{\bar{M}}{M}\right)a^2}}{2\left(1-\frac{\bar{M}}{M}\right)}=a\,\frac{1\pm\sqrt{\frac{\bar{M}}{M}}}{1-\frac{\bar{M}}{M}} .$$

Protože musí být $0<y^*<a$, platí záporné znaménko a

$$y^*=a\,\frac{1-\sqrt{\frac{\bar{M}}{M}}}{1-\frac{\bar{M}}{M}}=a\eta;\quad \eta=\frac{1-\sqrt{\frac{\bar{M}}{M}}}{1-\frac{\bar{M}}{M}} .$$

Odpovídající minimální rychlost je $v^2_{min}=v^2(y^*)$,

neboli

$$v^2_{min}=v_s^2-2gR\left[1-\frac{R}{a\eta}-\frac{\bar{M}}{M}\left(\frac{R}{a-a\eta}-\frac{R}{a-R}\right)\right].$$

Má-li sonda vůbec dosáhnout cíle, musí být $v^2_{min}\geq 0$.

To dává podmínku pro v_s^2

$$v_s^2\geq 2gR\left[1-\frac{R}{a\eta}-\frac{\bar{M}}{M}\left(\frac{R}{a-a\eta}-\frac{R}{a-R}\right)\right],$$

takže minimální startovací rychlost je

$$v_{S\min} = \sqrt{2gR\left[1 - \frac{R}{a\eta} - \frac{\bar{M}}{M}\left(\frac{R}{a-a\eta} - \frac{R}{a-R}\right)\right]}\,.$$

Minimální cílová rychlost dostaneme z (5), jestliže dosadíme $v_S = v_{S\min}$. Vyjde

$$v_{C\min}^2 = 2gR\left[1 - \frac{R}{a\eta} - \frac{\bar{M}}{M}\left(\frac{R}{a-a\eta} - \frac{R}{a-R}\right)\right] -$$

$$- 2gR\left[1 - \frac{R}{a-\bar{R}} - \frac{\bar{M}}{M}\left(\frac{R}{\bar{R}} - \frac{R}{a-R}\right)\right] =$$

$$= 2gR\left[\frac{R}{a-\bar{R}} - \frac{R}{a\eta} - \frac{\bar{M}}{M}\left(\frac{R}{a-a\eta} - \frac{R}{\bar{R}}\right)\right].$$

<u>Vypočtěte číselné</u> hodnoty y^*, $v_{S\min}$ a $v_{C\min}$; vezměte

$M = 5{,}976 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$; $a = 384\,000\,\mathrm{km}$; $\bar{R} = 1740\,\mathrm{km}$.

$\bar{M} = 7{,}350 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$; $R = 6370\,\mathrm{km}$;