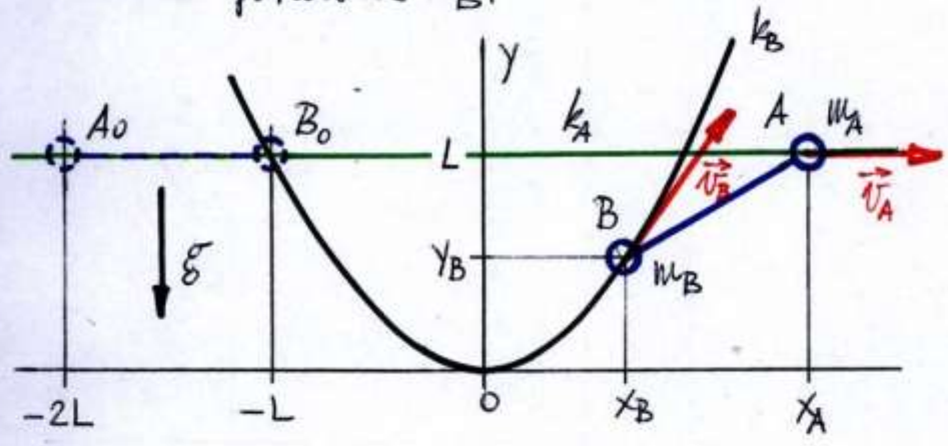
Příklad 6.2. Zákon zachování mechanické energie v soustavě dvou hmotných bodů.

Soustava dvou hmotných bodů A, B s danými hmotnostmi spojených nehmotnou tyčí dané délky se pohybuje v tíhovém poli tak, že bod A sleduje hladkou vodorovnou přímku k_A a bod B hladkou parabolu k_B.



Dáno:

- hmotnosti m_A, m_B hmotných bodů A, B;
- délka L spojovací tyče;
- trajektorie k_A: $y_A = L$;
- trajektorie k_B: $y_B = \dfrac{x_B^2}{L}$;
- výchozí klidová poloha
  $x_B = -L$, $x_A = -2L$;
- potenciální energie tíhového pole s konstantním tíhovým zrychlením g
  $$V(y) = mgy.$$

Určit:

- závislosti $v_A(x_B)$, $v_B(x_B)$ rychlostí v_A, v_B hmotných bodů A, B na souřadnici x_B bodu B;
- závislost souřadnice x_B bodu B na čase t.

Řešení:

V potenciálním silovém poli použijeme zákon zachování mechanické energie zapsaný pro výchozí a běžný stav.

$$K_0 + V_0 = K + V. \qquad (1)$$

Podle zadání je ve výchozím stavu

$$v_{A_0} = v_{B_0} = 0 \,,$$

takže $K_0 = 0$; Potenciální energie taktéž je

$$V_0 = m_A g L + m_B g L \,.$$

V běžném stavu je

$$K = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

a

$$V = m_A g L + m_B g y_B \,.$$

Dosazeno do rovnice (1)

$$\cancel{m_A g L} + m_B g L = \cancel{m_A g L} + m_B g y_B + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \,,$$

neboli po úpravě

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = 2 m_B g (L - y_B) \,. \qquad (2)$$

To je jediná rovnice pro 3 neznámé.

Další rovnice dodá <u>kinematika.</u>

Rovnice vnitřní vazby mezi body A a B je

$$L^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \qquad (3)$$

a rovnice vnějších vazeb jsou

$$y_A = L$$

$$y_B = \frac{x_B^2}{L} \,. \qquad (4)$$

Dosazením do (3) dostáváme

$$L^2 = (x_A - x_B)^2 + \left(L - \frac{x_B^2}{L}\right)^2$$

$$\cancel{L^2} = x_A^2 - 2 x_B x_A + x_B^2 + \cancel{L^2} - 2 \cancel{L} \frac{x_B^2}{\cancel{L}} + \frac{x_B^4}{L^2}$$

$$0 = x_A^2 - 2 x_B x_A - x_B^2 + \frac{x_B^4}{L^2} \,.$$

To je kvadratická rovnice pro x_A.

Řešení podle standardního vzorce je

$$x_{A1,2} = x_B \pm \sqrt{x_B^2 + x_B^2 - \frac{x_B^4}{L^2}} \,,$$

po úpravě

$$x_{A_{1,2}} = x_B\left[1 \pm \sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}\,\right].$$

Snadno se přesvědčíme (jak?), že pro náš případ platí znaménko +, takže

$$x_A = x_B\left[1 + \sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}\,\right]. \qquad (5)$$

Za rychlosti v_A, v_B do (2) dosadíme

$$v_A = \dot x_A,$$

$$v_B = \sqrt{\dot x_B^2 + \dot y_B^2}$$

resp.

$$v_A^2 = \dot x_A^2 \qquad (6)$$

$$v_B^2 = \dot x_B^2 + \dot y_B^2. \qquad (7)$$

Derivováním (4) nejprve dostaneme

$$\dot y_B = 2\frac{x_B}{L}\dot x_B$$

takže podle (7)

$$v_B^2 = \dot x_B^2\left[1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]. \qquad (8)$$

Dále derivováním (5)

$$\dot x_A = \dot x_B\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}\,\right] + x_B\frac{-\frac{x_B}{L}\frac{\dot x_B}{L}}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}$$

neboli

$$\dot x_A = \dot x_B\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right].$$

Povýšením na druhou s přihlédnutím k (6) je

$$v_A^2 = \dot x_B^2\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right]^2. \qquad (9)$$

Vyloučením $\dot x_B^2$ z rovnic (8) a (9) dostaneme

$$v_B^2 = v_A^2\frac{1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right]^2} \qquad (10)$$

a dosadíme spolu se (4) do (7).

$$v_A^2\left\{m_A+\frac{m_B\left[1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}{\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}-\frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right]^2}\right\}=$$

$$=2m_B g L\left[1-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]$$

a odtud

$$v_A^2=\frac{2m_B g L\left[1-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}{m_A+\dfrac{m_B\left[1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}{\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}-\frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right]^2}}.$$

Nakonec dosazením do (10)

$$v_B^2=\frac{2m_B g L\left[1-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]\left[1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}{m_A\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}-\frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right]^2+m_B\left[1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}. \tag{11}$$

<u>Druhá část úlohy</u>

analytické řešení není. Je totiž z rovnice (8)

$$\dot{x}_B=\sqrt{\frac{v_B^2}{1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}=\frac{dx_B}{dt},$$

takže separovaná diferenciální rovnice je

$$\sqrt{\frac{1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{v_B^2}}\,dx_B=dt$$

neboli po dosazení za v_B^2 a integraci

$$\int_{-L}^{x_B}\sqrt{\frac{m_A\left[1+\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}-\frac{\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}{\sqrt{2-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2}}\right]^2+m_B\left[1+4\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}{2m_B g L\left[1-\left(\frac{x_B}{L}\right)^2\right]}}\,dx_B=\int_0^t dt,$$

což je pro přímé integrování (pravděpodobně) neřešitelné. Je však možné řešit numericky.