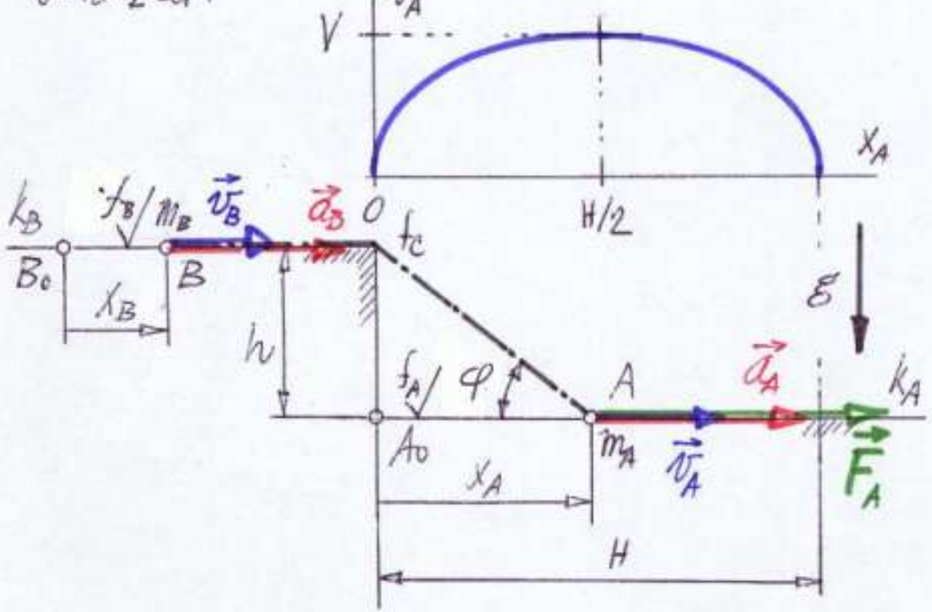
Příklad 6.1 I. úloha dynamiky pro vázaný pohyb soustavy hmotných bodů. Hmotné body A a B se pohybují ze svých výchozích poloh A_0, B_0 po daných drsných přímkových trajektoriích spojeny dokonale ohebným nehmotným lanem přes drsnou hranu v bodě C podle obrázku:



Dáno:

- konstanty V, H, h;
- hmotnosti m_A, m_B hmotných bodů A, B;
- koeficienty f_A, f_B suchého tření na přímkách k_A, k_B;
- koeficient f_C suchého tření na hraně C;
- délka L lana;
- rychlost v_A bodu A jako funkce polohy x_A

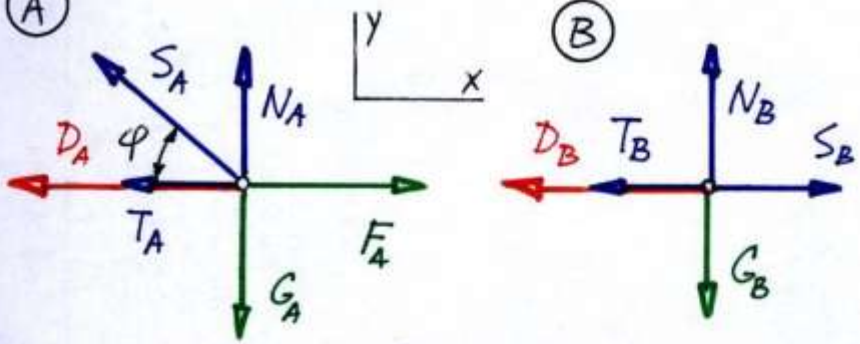
$$v_A(x_A) = 2V\sqrt{\frac{x_A}{H}-\left(\frac{x_A}{H}\right)^2}\,.$$

Úloha:

a) Určit závislost $F_A(x_A)$ velikosti tažné síly na poloze x_A pro předepsaný průběh rychlosti v_A.

b) Formulovat analogickou II. úlohu dynamiky.

Řešení ad a) provedeme pomocí d'Alembertových pohybových rovnic, takže začneme uvolněním s uvažováním dynamických sil. Pro bod



Rovnice dynamické rovnováhy pro bod

(A) $x: \; F_A - T_A - D_A - S_A \cos\varphi = 0$ (1)

$y: \; N_A - G_A + S_A \sin\varphi = 0$ (2)

(B) $x: \; S_B - T_B - D_B = 0$ (3)

$y: \; N_B - G_B = 0 \,.$ (4)

Specifikace sil

- tíhové $G_A = m_A g \,, \; G_B = m_B g$ (5,6)

- dynamické

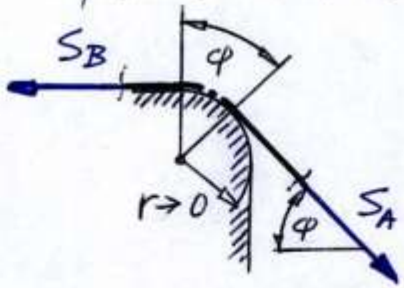
$$D_A = m_A a_A \,, \; D_B = m_B a_B \qquad (7,8)$$

- třecí

$$T_A = f_A N_A \,, \; T_B = f_B N_B \qquad (9,10)$$

(za předpokladu $N_A > 0$, $N_B > 0$).

- vztah mezi silami vláknového tření podle detailu bodu C



$$S_A = S_B \, e^{f_C \varphi} \qquad (11)$$

Kinematické rovnice

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{x_A} \qquad (12)$$

$$x_B = \sqrt{x_A^2 + h^2} - h \qquad (13)$$

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = \frac{dx_B}{dx_A} \cdot \frac{dx_A}{dt} = v_A \frac{dx_B}{dx_A} \qquad (14)$$

$$a_A = v_A \frac{dv_A}{dx_A} \qquad (15)$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_B}{dx_A} \cdot \frac{dx_A}{dt} = v_A \frac{dv_B}{dx_A} \,, \qquad (16)$$

přičemž

$$\frac{dv_B}{dx_A} = \frac{dv_A}{dx_A}\frac{dx_B}{dx_A} + v_A \frac{d^2 x_B}{dx_A^2} .$$

Inventura rovnic a proměnných.
K dispozici je 16 rovnic pro proměnné $F_A, T_A, D_A, S_A, \varphi, N_A, G_A, S_B, T_B, D_B, N_B, G_B, x_A, x_B, v_A, v_B, a_A, a_B, h$: celkem 18. 17. rovnici představuje zadání pro $v_A(x_A)$. Neznámé je tedy proměnných o jednu více než rovnic, což je v pořádku, protože všechny proměnné mohou záviset na zvolené nezávisle proměnné x_A.

Řešení.

U I. úlohy dynamiky lze vždy vyjádřit všechny kinematické veličiny v závislosti na zvolené nezávisle proměnné. V našem případě z rovnice (12)

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{h}{x_A} ,$$

z rovnice (13)

$$\frac{dx_B}{dx_A} = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + h^2}} , \tag{17}$$

takže

$$v_B = 2 V x_A \sqrt{\frac{\frac{x_A}{H} - \left(\frac{x_A}{H}\right)^2}{x_A^2 + h^2}} .$$

Ze zadání pro v_A je

$$\frac{dv_A}{dx_A} = \frac{V}{H} \frac{1 - 2\frac{x_A}{H}}{\sqrt{\frac{x_A}{H} - \left(\frac{x_A}{H}\right)^2}}$$

a další derivací (17) dostaneme

$$\frac{d^2 x_B}{dx_A^2} = \frac{\sqrt{x_A^2 + h^2} - \frac{x_A^2}{\sqrt{x_A^2 + h^2}}}{x_A^2 + h^2} = \frac{h^2}{(x_A^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Nyní už můžeme dosadit do (15) a (16) a zrychlení a_A i a_B se stanoví známými funkcemi $a_A(x_A)$, $a_B(x_A)$ nezávisle proměnné x_A.

Zbývá tedy vyřešit soustavu (1) až (11). Specifikace dosadíme do rovnic dyn. rovnováhy. Dostaneme

$$F_A - f_A N_A - m_A a_A(x_A) - S_A \cos\varphi(x_A) = 0 \qquad (18)$$

$$N_A - m_A g + S_A \sin\varphi(x_A) = 0 \qquad (19)$$

$$S_B - f_B N_B - m_B a_B(x_A) = 0 \qquad (20)$$

$$N_B - m_B g = 0\,. \qquad (21)$$

Z rovnice (21)

$$N_B = m_B g$$

a z rovnice (20)

$$S_B = m_B \left[f_B g + a_B(x_A) \right]. \qquad (22)$$

Z rovnice (19)

$$N_A = m_A g - S_A \sin\varphi(x_A)$$

dosazeno do (18)

$$F_A - m_A f_A g - m_A a_A(x_A) + S_A \left[f_A \sin\varphi(x_A) - \cos\varphi(x_A) \right] = 0$$

Nyní dosadíme (22) do (11) a máme

$$S_A = m_B \left[f_B g + a_B(x_A) \right] e^{f_c \varphi(x_A)},$$

takže nakonec

$$F_A(x_A) = m_A \left[f_A g + a_A(x_A) \right] -$$

$$- m_B \left[f_B g + a_B(x_A) \right] e^{f_c \varphi(x_A)} \left[f_A \sin\varphi(x_A) - \cos\varphi(x_A) \right].$$