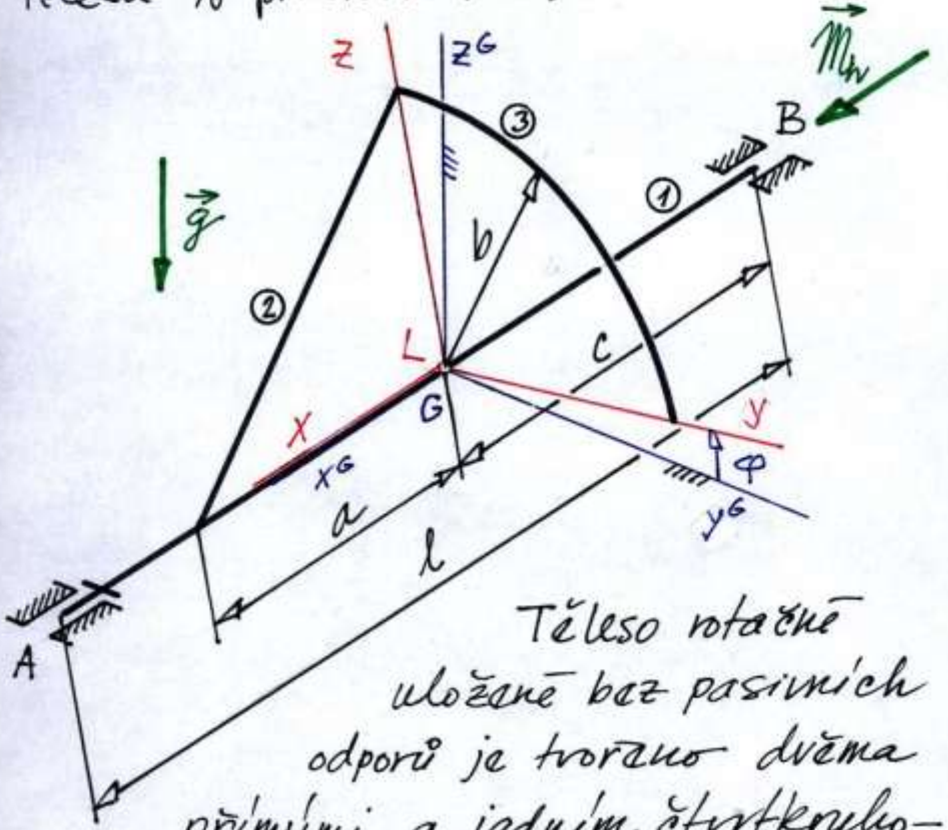
Příklad 10.1. Dynamika rotačního pohybu tělesa v prostoru (3D).



Těleso rotačně uložené bez pasivních odporů je tvořeno dvěma přímými a jedním čtvrtkruhovým prutem se zanedbatelnými příčnými rozměry. Je zatíženo daným hnacím momentem a tíhou.

Dáno: - rozměry a, b, c, l;

- délková hustota η prutů, $[\eta] = kg/m$;
- hnací moment M_h závislý na φ

$$M_h(\varphi) = M_0 (1+\varphi) e^{-\frac{\varphi}{\pi}} ; \qquad (1)$$

- konstanta M_0;
- počáteční podmínka $\omega(0) = 0$.

Určete:

- potřebné hmotnostní charakteristiky tělesa;
- závislost $\omega(\varphi)$ úhlové rychlosti ω na polohovém úhlu φ;
- reakce v uložení v bodech A, B.

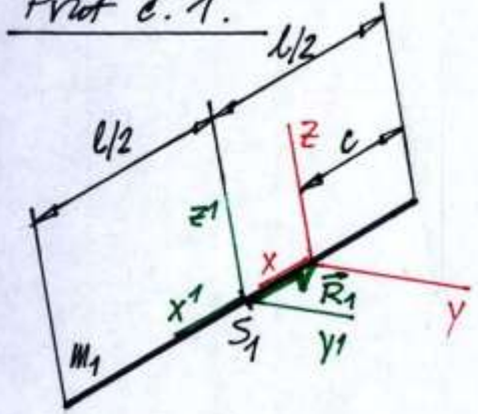
Řešení:

Pro rotaci okolo osy x jsou potřebnými hmotnostními charakteristikami

- hmotnost m,
- souřadnice x_S, y_S, z_S těžiště,
- moment setrvačnosti J_x,
- deviační momenty D_{xy} a D_{zx}.

Tyto hmotnostní charakteristiky určíme nejprve pro jednotlivé pruty.

Prut č. 1.



$$m_1 = \eta l .$$

$$x_1 = \frac{l}{2} - c,\ y_1 = z_1 = 0.$$

$$\mathbb{R}_1 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{l}{2} - c\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

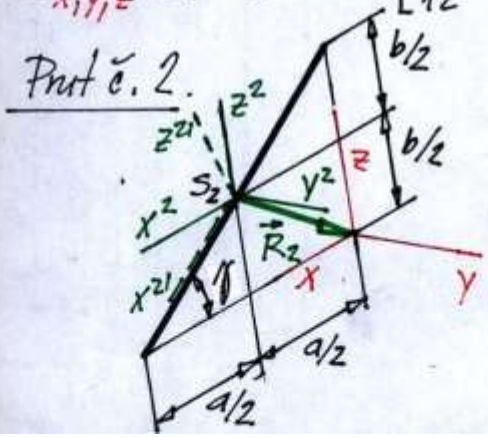
$$J_x^1 = 0,$$

$$D_{xy}^1 = 0,\ D_{zx}^1 = 0.$$

$$\mathbb{I}^1 = \frac{m_1 l^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{I}^1_{x,y,z} = \mathbb{I}^1 + \mathbb{D}^1 = m_1 \left[\frac{l^2}{12} + \left(\frac{l}{2} - c\right)^2\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prut č. 2.



$$m_2 = \eta \sqrt{a^2 + b^2} .$$

$$x_2 = \frac{a}{2},\ y_2 = 0,\ z_2 = \frac{b}{2}$$

$$\gamma = \mathrm{arctg}\, \frac{b}{a} .$$

$$\mathbb{R}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \end{bmatrix},\quad \mathbb{I}^{2'} = \frac{m_2 (a^2 + b^2)}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \cos(-\gamma) & 0 & \sin(-\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\gamma) & 0 & \cos(-\gamma) \end{bmatrix},\ \mathbb{D}^2 = \frac{m_2}{4} \begin{bmatrix} b^2 & & -ab \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{I}^2 = \mathbb{T}^T \mathbb{I}^{2'} \mathbb{T} = \frac{m_2 (a^2 + b^2)}{12} \begin{bmatrix} \sin^2\gamma & 0 & \sin\gamma\cos\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma\cos\gamma & 0 & \cos^2\gamma \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{I}^2_{x,y,z} = \mathbb{I}^2 + \mathbb{D}^2 =$$

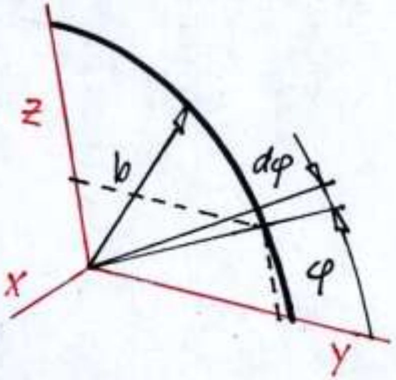
$$= \frac{m_2 (a^2 + b^2)}{12} \begin{bmatrix} \sin^2\gamma & 0 & \sin\gamma\cos\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma\cos\gamma & 0 & \cos^2\gamma \end{bmatrix} + \frac{m_2}{4} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

$$J_x^2 = \frac{m_2}{4} \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \sin^2\gamma + b^2 \right),$$

$$D_{xy}^2 = 0,$$

$$D_{zx}^2 = \frac{m_2}{4} \left(-\frac{a^2 + b^2}{3} \sin\gamma\cos\gamma + ab \right).$$

Prut č. 3.



$m_3 = \eta \frac{\pi}{2} b$,

$x_3 = 0$,

$$m_3 y_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dm = \eta b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \eta b^2,$$

$$\eta \frac{\pi}{2} b\, y_3 = \eta b^2 \Rightarrow y_3 = \frac{2}{\pi} b,$$

analogicky $z_3 = \frac{2}{\pi} b$.

Kvadratické momenty vypočítáme přímo v SS (x, y, z).

$$J_x^3 = b^2 \int_{(m)} dm = \eta b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2} \eta b^3.$$

$$D_{xy}^3 = \int_{(m)} xy\,dm = 0.$$

$$D_{zx}^3 = \int_{(m)} zx\,dm = 0.$$

Pro celé těleso:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = \eta\left(l + \sqrt{a^2+b^2} + \frac{\pi}{2} b\right),$$

$$m x_S = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = \eta\left[l\left(\frac{l}{2} - c\right) + \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right],$$

$$x_S = \frac{l(l-2c) + a\sqrt{a^2+b^2}}{2\left(l + \sqrt{a^2+b^2} + \frac{\pi}{2} b\right)},$$

$$m y_S = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = \eta \frac{\pi}{\cancel{2}} b \frac{\cancel{2}}{\pi} b = \eta b^2$$

$$y_S = \frac{b^2}{l + \sqrt{a^2+b^2} + \frac{\pi}{2} b},$$

$$m z_S = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = \eta\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{b}{2} + b^2\right),$$

$$z_S = \frac{b\sqrt{a^2+b^2} + 2b^2}{2\left(l + \sqrt{a^2+b^2} + \frac{\pi}{2} b\right)}.$$

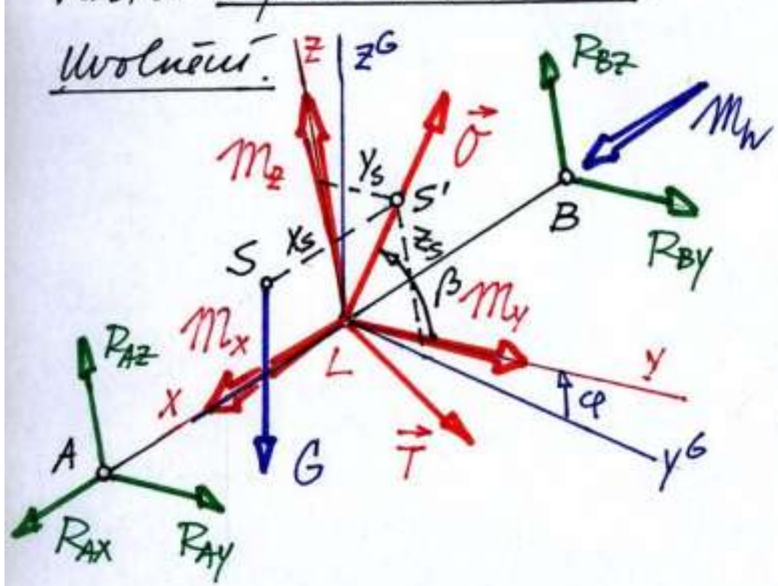
$$J_x = J_x^1 + J_x^2 + J_x^3 = \eta\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{3}\sin^2\gamma + b^2\right) + \frac{\pi}{2} b^3\right],$$

$$D_{xy} = D_{xy}^1 + D_{xy}^2 + D_{xy}^3 = 0,$$

$$D_{zx} = D_{zx}^1 + D_{zx}^2 + D_{zx}^3 = \eta \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}\left(ab - \frac{a^2+b^2}{3}\sin\gamma\cos\gamma\right).$$

Vlastní dynamické řešení:

Uvolnění.



Rovnice dynamické rovnováhy napíšeme ve složkách pohyblivého SS (L, x, y, z).

$x: \quad R_{Ax} = 0$

$y: \quad -G\sin\varphi + R_{Ay} + R_{By} + O\cos\beta + T\sin\beta = 0$

$z: \quad -G\cos\varphi + R_{Az} + R_{Bz} + O\sin\beta - T\cos\beta = 0$

$\curvearrowleft x: \quad G(z_s\sin\varphi - y_s\cos\varphi) + M_W + M_x = 0$

$\curvearrowleft y: \quad G x_s\cos\varphi - R_{Az}(l-c) + R_{Bz}c + M_y = 0$

$\curvearrowleft z: \quad -G x_s\sin\varphi + R_{Ay}(l-c) - R_{By}c + M_z = 0.$

Specifikace silových účinků

$G = mg,$

$O = me\omega^2,$

$T = me\alpha,$

$M_x = -J_x\alpha,$

$M_y = D_{xy}\alpha - D_{zx}\omega^2 = -D_{zx}\omega^2,$

$M_z = D_{zx}\alpha + D_{xy}\omega^2 = D_{zx}\alpha.$

Kinematické (a geometrické) rovnice

$\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{z_s}{y_s},$

$e = \sqrt{y_s^2 + z_s^2},$

$\alpha = \omega\dfrac{d\omega}{d\varphi}.$

Inventura.

Proměnné jsou: $R_{Ax}, G, \varphi, R_{Ay}, R_{By}, O, \beta,$

T, R_{Az}, R_{Bz}, M_k, M_x, M_y, M_z, e, ω, α, celkem 17. Rovnic je 16. To je v pořádku, 16 veličin jsou buď konstanty nebo funkce nezávisle proměnné φ.

Řešení soustavy rovnic

Hlavní pohybovou rovnicí je rovnice momentové dynamické rovnováhy k ose x. Dosadíme-li za G, M_k a M_x, dostáváme po separaci ω a φ

$$J_x\int_0^{\omega}\omega\,d\omega=\int_0^{\varphi}\left[mg(z_S\sin\varphi-y_S\cos\varphi)+M_0(1+\varphi)e^{-\frac{\varphi}{\pi}}\right]d\varphi$$

a po integraci

$$\omega^2=\frac{2}{J_x}\left\{mg\left[z_S(1-\cos\varphi)-y_S\sin\varphi\right]+M_0\pi\left[\pi+1-(\pi+1+\varphi)e^{-\frac{\varphi}{\pi}}\right]\right\}.$$

První rovnovážné rovnice

$$R_{Ax}=0$$

je řešením pro R_{Ax}. Ostatní rovnice upravíme do tvaru

$$R_{Ay}+R_{By}=mg\sin\varphi-me(\omega^2\cos\beta+\alpha\sin\beta)$$

$$R_{Az}+R_{Bz}=mg\cos\varphi-me(\omega^2\sin\beta-\alpha\cos\beta)$$

$$-(l-c)R_{Az}+cR_{Bz}=-mg\,x_S\cos\varphi+D_{zx}\omega^2$$

$$(l-c)R_{Ay}-cR_{By}=mg\,x_S\sin\varphi-D_{zx}\alpha\,.$$

Dosazením za ω^2 a α se pravé strany těchto rovnic stanou známými funkcemi φ. Označíme je $f_i(\varphi)$, $i=1,\dots,4$.

Řešení pak je

$$R_{Ay}=\frac{cf_1(\varphi)+f_4(\varphi)}{l}\,,\quad R_{By}=\frac{(l-c)f_1(\varphi)-f_4(\varphi)}{l}\,,$$

$$R_{Az}=\frac{cf_2(\varphi)-f_3(\varphi)}{l}\,,\quad R_{Bz}=\frac{(l-c)f_2(\varphi)+f_4(\varphi)}{l}\,.$$