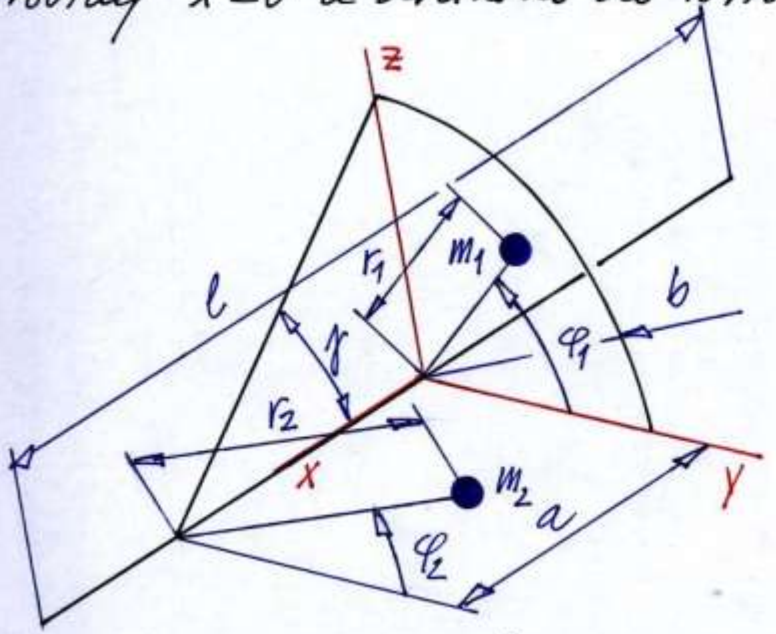
Příklad 10.2. Vyvažování rotujícího tělesa.

Těleso z příkladu 10.1. se má dynamicky vyvážit pro rotaci okolo osy x přidáním dvou hmotných bodů; jednoho do roviny $x=0$ a druhého do roviny $x=a$.



Dáno: - poloha těžiště

$$y_S=\frac{b^2}{l+\sqrt{a^2+b^2}+\frac{\pi}{2}b},\quad z_S=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}+2b^2}{2\left(l+\sqrt{a^2+b^2}+\frac{\pi}{2}b\right)};$$

- deviační momenty

$$D_{xy}=0,\quad D_{zx}=\eta\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}\left(ab-\frac{a^2+b^2}{3}\sin\gamma\cos\gamma\right);$$

- hmotnost tělesa

$$m=\eta\left(l+\sqrt{a^2+b^2}+\frac{\pi}{2}b\right).$$

Určit: hmotnosti m_1, m_2 a polohy $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ vývažků.

Řešení:

Podmínkou dynamického vyvážení tělesa jsou nulové statické a deviační momenty tělesa doplněného vývažky. Tedy v daném případě

$$S'_{xy}=m z_S+m_1 r_1\sin\varphi_1+m_2 r_2\sin\varphi_2=0$$

$$S'_{zx}=m y_S+m_1 r_1\cos\varphi_1+m_2 r_2\cos\varphi_2=0$$

$$D'_{xy}=m_2 a r_2\cos\varphi_2=0$$

$$D'_{zx}=D_{zx}+m_2 a r_2\sin\varphi_2=0.$$

Protože rovnice jsou jen 4 zatímco neznámých je 6, musíme dvě neznámé zvolit. Volme např.

$$r_1 = r_2 = b.$$

Rovnice pak nabudou tvaru

$$m_1 b \sin\varphi_1 + m_2 b \sin\varphi_2 = -m z_s \qquad (1)$$

$$m_1 b \cos\varphi_1 + m_2 b \cos\varphi_2 = -m y_s \qquad (2)$$

$$m_2 ab \cos\varphi_2 = 0 \qquad (3)$$

$$m_2 ab \sin\varphi_2 = -D_{zx} \qquad (4)$$

Protože musí být $m_2 \neq 0$, má rovnice (3) řešení pro φ_2

$$\cos\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ nebo } \frac{3\pi}{2}.$$

tomu odpovídají hodnoty

$$\sin\varphi_2 = 1 \text{ nebo } \sin\varphi_2 = -1$$

Z rovnice (4) pak

$$m_2 = -\frac{D_{zx}}{ab\sin\varphi_2}.$$

Předpokládáme-li rozměry tělesa takové, že $D_{zx} > 0$ a protože v daném případě nelze hmotu odebírat, takže $m_2 > 0$, musíme vybrat

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}, \ \sin\varphi_2 = -1, \ m_2 = \frac{D_{zx}}{ab}.$$

Rovnice (1) a (2) tak přejdou na tvar

$$m_1 b \sin\varphi_1 = -m z_s + \frac{D_{zx}}{a\cancel{b}}\cancel{b} \qquad (5)$$

$$m_1 b \cos\varphi_1 = -m y_s \ . \qquad (6)$$

Obě rovnice nejprve vydělíme. Dostaneme

$$\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} = \frac{z_s - \frac{D_{zx}}{am}}{y_s},$$

takže

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{z_s - \frac{D_{zx}}{am}}{y_s}.$$

Dále obě rovnice povýšíme na druhou a sečteme. Dostaneme

$$m_1^2 b^2 (\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1) = m^2 z_S^2 - 2m z_S \frac{D_{zx}}{a} + \frac{D_{zx}^2}{a^2} +$$
$$+ m^2 y_S^2$$

a odtud

$$m_1 = \sqrt{m^2 \frac{y_S^2 + z_S^2}{b^2} - 2m \frac{z_S D_{zx}}{ab^2} + \frac{D_{zx}^2}{a^2 b^2}} \,.$$