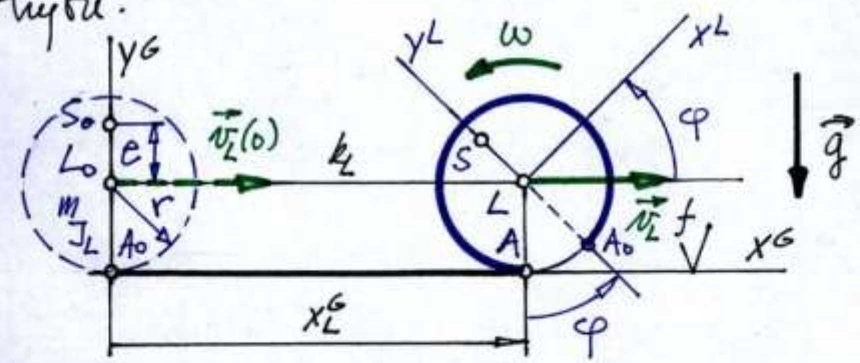
Příklad 11.2. Dynamika valivého pohybu.



Nevyvážený válec se valí po vodorovné rovině bez odporu proti valení pod účinkem tíhové síly.

Dáno: - rozměry r, e válce;

- hmotnost m válce;
- moment setrvačnosti J_L válce k ose procházející bodem L;
- koeficient f adheze mezi válcem a podložkou;
- počáteční rychlost $v_L(0)$ bodu L.

Určete závislost $v_L(x_L^G)$ rychlosti v_L bodu L na globální poloze x_L^G bodu L

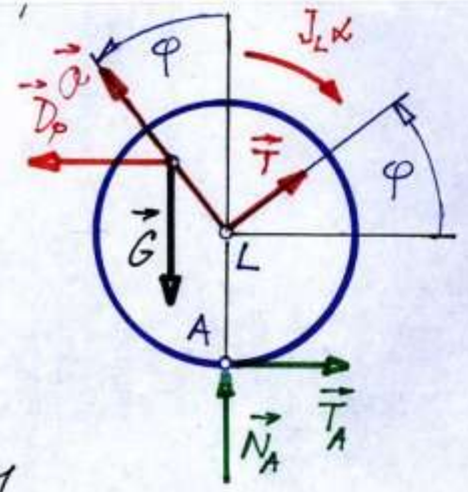
A. metodou pohybových rovnic,

B. použitím zákona zachování mech. energie,

a rozhodněte, zda je splněna silová podmínka valení.

Řešení A.

Uvolníme válec v obecné poloze. Akční síla je vyznačena černě, reakce zeleně a dynamické účinky červeně.



Složkové rovnice dynamické rovnováhy napíšeme ve směrech x^G, y^G globálního SS a momentovou rovnici k bodu L. Dostaneme

$$x^G:\ T_A - D_p - O\sin\varphi + T\cos\varphi = 0, \qquad (1)$$

$$y^{G}: -G + N_A + O\cos\varphi + T\sin\varphi = 0, \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft L: \quad G e \sin\varphi + T_A r + D_p e\cos\varphi - J_L\alpha = 0. \qquad (3)$$

Dále <u>specifikujeme síly</u>. Platí

$$G = mg, \quad D_p = m a_L, \qquad (4,5)$$

$$O = m e \omega^2, \quad T = m e \alpha. \qquad (6,7)$$

Přidáme <u>kinematické rovnice</u>.

Kinematická podmínka rovnosti odvalených oblouků dává

$$x_L^G = r(2\pi - \varphi). \qquad (8)$$

Derivací podle času dostaneme vztah

$$v_L = -r\omega \qquad (9)$$

mezi rychlostí bodu L a úhlovou rychlostí tělesa. Nakonec pro zrychlení a úhlové zrychlení použijeme vztahy

$$a_L = \frac{1}{2}\frac{dv_L^2}{dx_L^G} \qquad (10)$$

a po derivaci (9)

$$a_L = -r\alpha. \qquad (11)$$

<u>Inventura:</u> Neznámé v rovnicích jsou $D_P, O, T, \varphi, G, T_A, N_A, a_L, \omega, \alpha, x_L^G, v_L$, celkem 12. Rovnic je 11, což je v pořádku, neboť 11 neznámých vyjde jako funkce 12., v našem případě x_L^G.

<u>Matematické řešení</u>

Z rovnice (1) vypočteme T_A

$$T_A = D_p + O\sin\varphi - T\cos\varphi, \qquad (12)$$

dosadíme do (3) a upravíme

$$G e\sin\varphi + D_p(r + e\cos\varphi) + O r\sin\varphi - \\ - T r\cos\varphi - J_L\alpha = 0. \qquad (13)$$

Do rovnice (13) nyní dosadíme za specifikované síly. Dostaneme

$$m g e\sin\varphi + m a_L(r + e\cos\varphi) + m e\omega^2 r\sin\varphi - \\ -(m e r\cos\varphi + J_L)\alpha = 0. \qquad (14)$$

Nyní z (9) a (11) vypočteme ω a α a dosadíme do (14) s výsledkem

$$mgesin\varphi + ma_L\left(r + 2e\cos\varphi + \frac{J_L}{mr}\right) + me\frac{v_L^2}{r}\sin\varphi = 0,$$

takže po krácení m máme

$$\left(r + 2e\cos\varphi + \frac{J_L}{mr}\right)a_L + \frac{e}{r}\sin\varphi\, v_L^2 = -ge\sin\varphi. \qquad (15)$$

Protože z (8)

$$\varphi = 2\pi - \frac{x_L^c}{r}$$

bude

$$\sin\varphi = -\sin\frac{x_L^c}{r}\,,\quad \cos\varphi = \cos\frac{x_L^c}{r}$$

a po dosazení z (10) přejde (15) na tvar

$$\left(r + 2e\cos\frac{x_L^c}{r} + \frac{J_L}{mr}\right)\frac{dv_L^2}{dx_L^c} - 2\frac{e}{r}\sin\frac{x_L^c}{r}v_L^2 = = 2ge\sin\frac{x_L^c}{r}.$$

Substitucemi

$$v_L^2 = z\,,\quad \frac{x_L^c}{r} = u\,,\quad dx_L^c = r\,du$$

dostaneme nakonec

$$\left(1 + 2\frac{e}{r}\cos u + \frac{J_L}{mr^2}\right)\frac{dz}{du} - 2\frac{e}{r}\sin u\cdot z = = 2ge\sin u, \qquad (16)$$

což je diferenciální rovnice 1. řádu pro $z = z(u)$.

Označíme-li nyní koeficient u dz/du

$$F(u) = 1 + 2\frac{e}{r}\cos u + \frac{J_L}{mr^2} \qquad (17)$$

je zřejmé, že levá strana rovnice (16) je

$$\frac{d}{du}\Big[F(u)\cdot z(u)\Big],$$

takže se snadno separuje do tvaru

$$d\Big[F(u)\cdot z(u)\Big] = 2ge\sin u\,du. \qquad (18)$$

Vzhledem k zadané počáteční podmínce pro $x_L^c = 0$, tj. pro $u = 0$, je $z(0) = v_L^2(0)$ a integrál separované rovnice (18) můžeme zapsat jako

$$\int_{F(0)z(0)}^{F(u)z(u)} d(Fz) = 2ge\int_0^u \sin u\, du .$$

Řešení pak je

$$F(u)z(u) - F(0)z(0) = 2ge\left(1-\cos u\right),$$

neboli, vzhledem k substitucím,

$$\left(1+2\frac{e}{r}\cos\frac{x_L^c}{r}+\frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2 =$$

$$= \left(1+2\frac{e}{r}+\frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2(0)+2ge\left(1-\cos\frac{x_L^c}{r}\right).$$

Odtud již počítáme finální výsledek

$$v_L(x_L^c) = \sqrt{\frac{\left(1+2\frac{e}{r}+\frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2(0)+2ge\left(1-\cos\frac{x_L^c}{r}\right)}{1+2\frac{e}{r}\cos\frac{x_L^c}{r}+\frac{J_L}{mr^2}}}.$$

Při <u>řešení B</u> s použitím zákona zachování mechanické energie bude hlavní rovnice

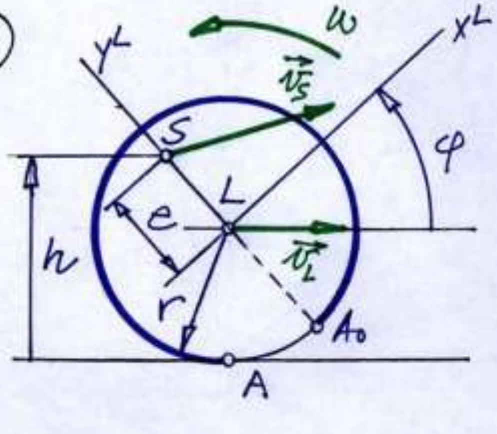
$$K_0+V_0 = K+V \qquad (19)$$

aplikována na výchozí a průběžný stav podle zadávacího obrázku. V průběžném stavu je podle Königovy věty kinetická energie

$$K = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2, \qquad (20)$$

kde v_S je rychlost těžiště a J_S moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm tělesa. Potenciální energie v průběžném stavu je

$$V = mgh, \qquad (21)$$



kde h je výška těžiště S tělesa nad základnou,

$$h = r+e\cos\varphi .$$

Z transformační rovnice tělesa psané pro bod S

$$\mathbf{r}_S^G = \mathbf{r}_L^G + \mathbb{T}^{GL}\mathbf{r}_S^L$$

derivováním dostaneme

$$\mathbf{v}_S^G = \dot{\mathbf{r}}_S^G = \dot{\mathbf{r}}_L^G + \dot{\mathbb{T}}^{GL}\mathbf{r}_S^L = \mathbf{v}_L^G + \dot{\mathbb{T}}^{GL}\mathbf{r}_S^L$$

a po dosazení za vektory a matici

$$\begin{bmatrix} v_{Sx} \\ v_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{bmatrix} \dot\varphi .$$

Odtud

$$v_{Sx} = v_L - e\cos\varphi\,\omega$$

$$v_{Sy} = -e\sin\varphi\,\omega$$

Pro dosazení do (20) je

$$v_S^2 = v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 = v_L^2 - 2ev_L\omega\cos\varphi + e^2\omega^2 ,$$

takže

$$K = \frac{1}{2}m\left[v_L^2 - 2ev_L\omega\cos\varphi + \left(e^2 + \frac{J_S}{m}\right)\omega^2\right].$$

Nyní dosadíme z (9) za ω a podle Steinerovy věty

$$J_S = J_L - me^2 .$$

Dostaneme

$$K = \frac{1}{2}m\left(1 + 2\frac{e}{r}\cos\varphi + \frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2 .$$

Celková mechanická energie v průběžném stavu je pak

$$K + V = \frac{1}{2}m\left(1 + 2\frac{e}{r}\cos\varphi + \frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2 + mg(r + e\cos\varphi).$$

Pro celkovou mechanickou energii ve výchozím stavu stačí dosadit $\varphi = 0$. Pak je

$$K_0 + V_0 = \frac{1}{2}m\left(1 + 2\frac{e}{r} + \frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2(0) + mg(r + e).$$

Z dosazení do (19) pak dostáváme

$$v_L = \sqrt{\frac{\left(1 + 2\frac{e}{r} + \frac{J_L}{mr^2}\right)v_L^2(0) + 2ge(1 - \cos\varphi)}{1 + 2\frac{e}{r}\cos\varphi + \frac{J_L}{mr^2}}} \quad (22)$$

stejně jako v řešení A.

Rozhodnout o splnění podmínky valení (silově) můžeme pouze v řešení A, protože v řešení B nejsou k dispozici žádné síly.

Dosazením vztahů (5) až (7) a (9) do (12) dostaneme po úpravě

$$T_A = m\left[a_L\left(1+\frac{e}{r}\cos\varphi\right) + \frac{e}{r^2}v_L^2\sin\varphi\right].$$

Dosazením (4), (6) a (7) do (2) dostaneme

$$-mg + N_A + me\omega^2\cos\varphi + me\alpha\sin\varphi = 0$$

a s použitím (9) a (11) můžeme vypočítat

$$N_A = m\left(g+\frac{e}{r}a_L\sin\varphi - \frac{e}{r^2}v_L^2\cos\varphi\right).$$

Podmínka adheze je

$$|T_A| \le f N_A ,$$

neboli

$$\left|a_L\left(1+\frac{e}{r}\cos\varphi\right)+\frac{e}{r^2}v_L^2\sin\varphi\right| \le \\ \le f\left(g+\frac{e}{r}a_L\sin\varphi-\frac{e}{r^2}v_L^2\cos\varphi\right). \qquad (23)$$

Zrychlení a_L můžeme vypočítat z (15)

$$a_L = -e\,\frac{g+\frac{v_L^2}{r}}{r+2e\cos\varphi+\frac{J_L}{mr}}\sin\varphi$$

a pro v_L máme výsledek (22).

Dosazením do (23) pak můžeme stanovit interval φ resp. x_L^c, ve kterém případně podmínka adheze splněna není.