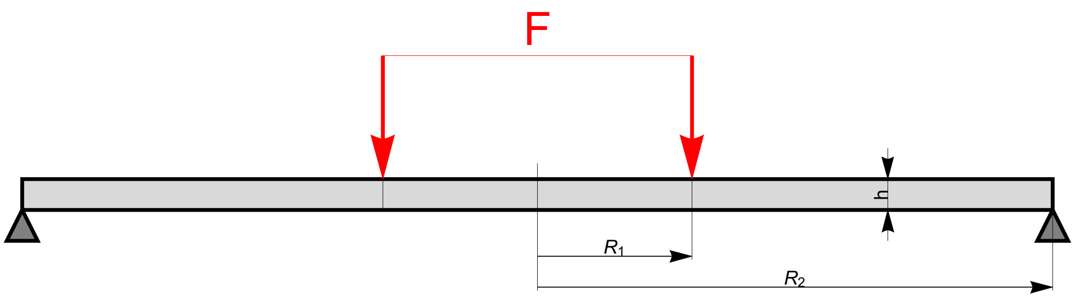
In[1]:=
```
ClearAll["Global`*"]
```

Kruhová deska

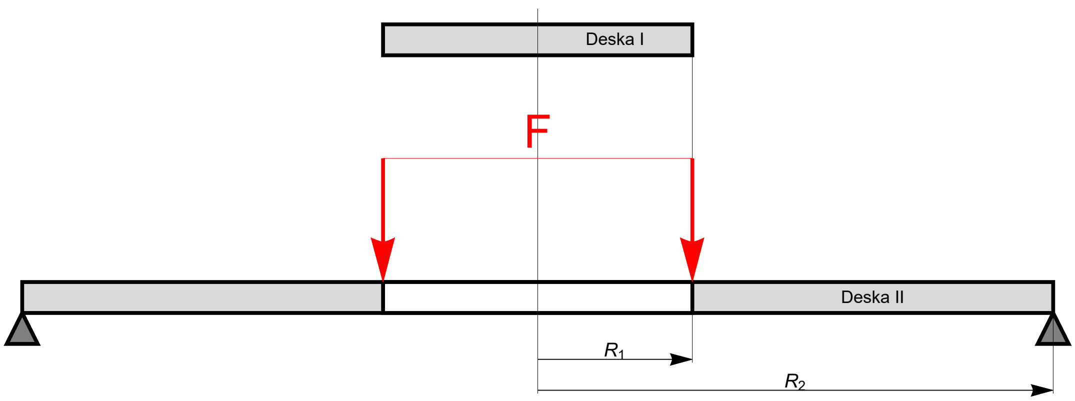
Deska je na poloměru R_1 zatížena silou F a na vnějším poloměru R_2 podepřena. Určíme deformace a napětí v desce.

Out[2]=



Desku rozdělíme na dvě části.

Out[3]=



Obecné řešení diferenciální rovnice pro φ v obou případech známe

In[4]:=

$$\varphi_{I} = C_1\, x + \frac{C_2}{x};$$

$$\varphi_{II} = -\frac{F}{2\,\pi\,\mathbb{D}}\left(\frac{x}{2}\,\mathrm{Log}[x] - \frac{x}{4}\right) + C_3\, x + \frac{C_4}{x};$$

Vztahy pro radiální a tečné napětí (na dolní ploše desky) jsou

In[6]:=

$$\sigma_{rI} = \frac{\mathbb{E}\, h}{2\,(1-\mu^2)}\left(D[\varphi_{I}, x] + \mu\,\frac{\varphi_{I}}{x}\right);$$

$$\sigma_{tI} = \frac{\mathbb{E}\, h}{2\,(1-\mu^2)}\left(\frac{\varphi_{I}}{x} + \mu\, D[\varphi_{I}, x]\right);$$

$$\sigma_{rII} = \frac{\mathbb{E}\, h}{2\,(1-\mu^2)}\left(D[\varphi_{II}, x] + \mu\,\frac{\varphi_{II}}{x}\right);$$

$$\sigma_{tII} = \frac{\mathbb{E}\, h}{2\,(1-\mu^2)}\left(\frac{\varphi_{II}}{x} + \mu\, D[\varphi_{II}, x]\right);$$

Okrajové podmínky vypadají takto

In[10]:=
```
okrajovePodminky = { (C₂ == 0),
    (φI == φII) /. x → R₁,
    (σrI == σrII) /. x → R₁,
    (σrII == 0) /. x → R₂ };
```

a s jejich pomocí určíme integrační konstanty C_1 až C_4:

In[11]:=
```
{C₁, C₂, C₃, C₄} =
  {C₁, C₂, C₃, C₄} /. Solve[okrajovePodminky, {C₁, C₂, C₃, C₄}][[1]] // Simplify
```

Out[11]= $\left\{\left(F\left((-1+\mu)R_1^2-(-1+\mu+2(1+\mu)\,\mathrm{Log}[R_1]-2(1+\mu)\,\mathrm{Log}[R_2])R_2^2\right)\right)/\left(8\pi\mathbb{D}(1+\mu)R_2^2\right),\ 0,\ \left(F\left((-1+\mu)R_1^2+(1-\mu+2(1+\mu)\,\mathrm{Log}[R_2])R_2^2\right)\right)/\left(8\pi\mathbb{D}(1+\mu)R_2^2\right),\ -\frac{F R_1^2}{8\pi\mathbb{D}}\right\}$

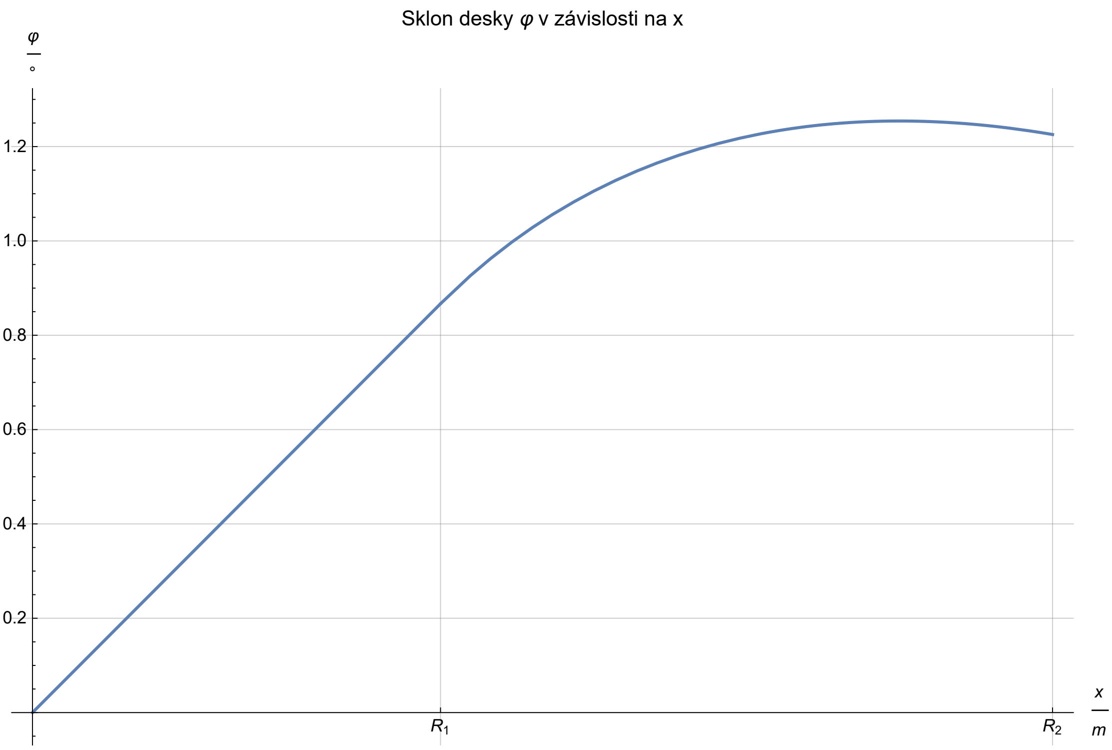
Definujeme si tuhost desky, zvolíme nějaká čísla a můžeme si vyčíslit průběh sklonu a naklreslit jeho graf

In[12]:= $\mathbb{D} = \frac{\mathbb{E}\, h^3}{12\,(1-\mu^2)};$

In[13]:= $\mathrm{cisla} = \{\mathbb{E} \to 2.1\times 10^{11},\ \mu \to 0.3,\ h \to 0.005,\ R_1 \to 0.1,\ R_2 \to 0.25,\ F \to 4000\};$

In[14]:= $\phi = \begin{cases} \varphi_{I} & 0 \le x < R_1 \\ \varphi_{II} & R_1 \le x \le R_2 \end{cases}$ /. cisla;

Out[15]=



Pro průhyb v jednotlivých částech desky platí vztahy (Wolfram Mathematica nedoplňuje k neurčitým integrálům konstanty, proto je tam musím připsat sám)

In[16]:= $w_{I} = \int \varphi_{I}\, dx + C_5;$

$w_{II} = \int \varphi_{II}\, dx + C_6;$

přičemž na obvodu musí být průhyb nulový (tam je deska podepřena) a na hranici mezi deskami musí být hodnota průhybu pro obě desky stejná. Okrajové podmínky pro průhyb tedy jsou

In[18]:=
```
okrajovePodminky2 = { (wI == wII) /. x → R1,
                      (wII == 0) /. x → R2};
```

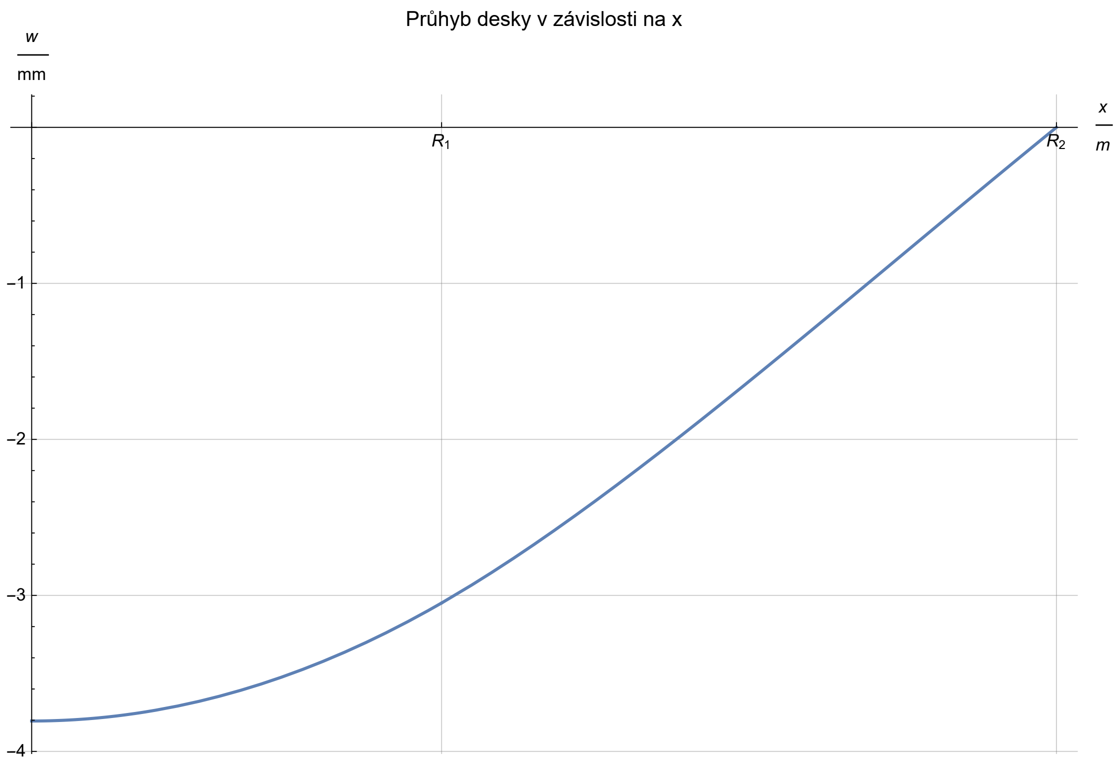
Určíme hodnoty konstant

In[19]:=
```
{C5, C6} = {C5, C6} /. Solve[okrajovePodminky2, {C5, C6}][[1]] // Simplify
```

Out[19]=
$$\left\{\frac{1}{4 h^3 \pi \mathbb{E}} 3 F (-1+\mu) \left((-3-\mu+2 (1+\mu) \operatorname{Log}[R_1]-2 (1+\mu) \operatorname{Log}[R_2]) R_1^2+(3+\mu) R_2^2\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{4 h^3 \pi \mathbb{E}} 3 F (-1+\mu) \left((-1+\mu-2 (1+\mu) \operatorname{Log}[R_2]) R_1^2+(3+\mu) R_2^2\right)\right\}$$

Vyčíslíme průhyb a nakreslíme si jeho graf

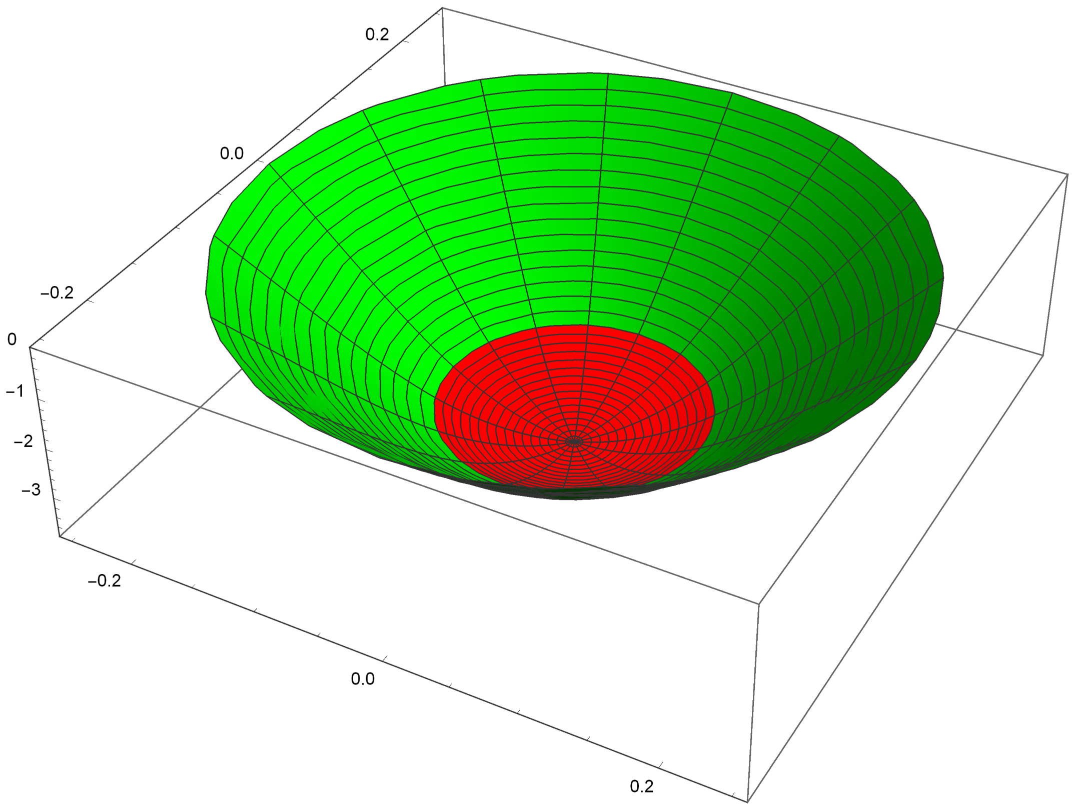
In[20]:=
$$W = \begin{cases} w_I & 0 \le x < R_1 \\ w_{II} & R_1 \le x \le R_2 \end{cases} \text{ /. cisla;}$$

Out[21]=


In[22]:=

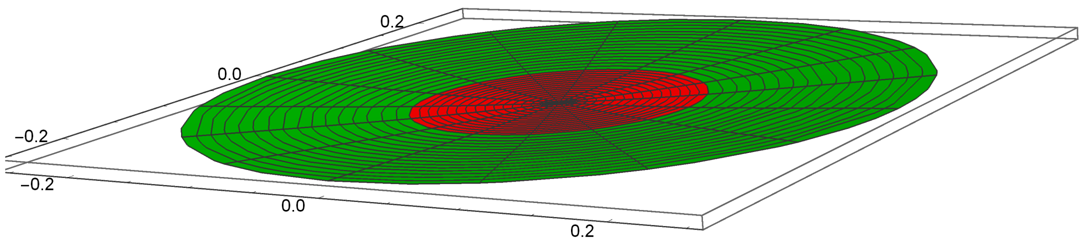
Zdeformovaná deska (průhyb není v měřítku)

Out[24]=



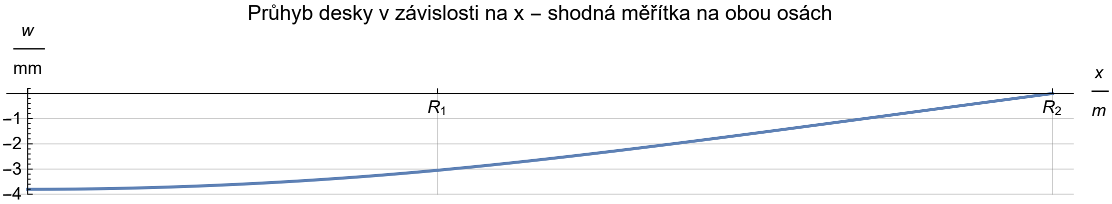
Zdeformovaná deska (průhyb JE v měřítku)

Out[26]=



Průhyb desky v závislosti na x – shodná měřítka na obou osách

Out[27]=



In[28]:=

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_{rI} & 0 \le x < R_1 \\ \sigma_{rII} & R_1 \le x \le R_2 \end{cases} \text{ /. cisla;}$$

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_{tI} & 0 \le x < R_1 \\ \sigma_{tII} & R_1 \le x \le R_2 \end{cases} \text{ /. cisla;}$$

Out[30]=