

Příklad 2.1. I. úloha dynamiky
(kinostatika) pro volný pohyb
hmotného bodu.

Částice plovoucí na povrchu vody
má trajektorii, která je ve váleco-
ných souřadnicích popsána para-
metrickými rovniciemi

$$\rho(t) = \rho_0 - v_{\rho 0} t,$$

$$\varphi(t) = \frac{v_{\varphi 0} t}{\rho_0 - v_{\rho 0} t},$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2,$$

kde $\rho_0, v_{\rho 0}, v_{\varphi 0}$ a g jsou dány konstanty.

Určete složky F_ρ, F_φ a F_z síly $\vec{F}$, která
tento pohyb myslíme, je-li hmot-
nost částice m .

Řešení.

Poluybrá rovnice

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

máme ve válecném souřadnicovém systému
složky

$$m a_\rho = F_\rho \quad (1)$$

$$m a_\varphi = F_\varphi \quad (2)$$

$$m a_z = F_z \quad (3)$$

Z kinematických vztahů, že

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

$$a_z = \ddot{z},$$

V daném případě je

$$\dot{\rho} = -v_{\rho 0}, \quad \ddot{\rho} = 0.$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_{\varphi 0} (\rho_0 - v_{\rho 0} t) - v_{\varphi 0} t (-v_{\rho 0})}{(\rho_0 - v_{\rho 0} t)^2} = \frac{\rho_0 v_{\varphi 0}}{(\rho_0 - v_{\rho 0} t)^2},$$

$$\ddot{\varphi} = -2\rho_0 v_{\varphi_0} \frac{-v_{\varphi_0}}{(\rho_0 - v_{\varphi_0} t)^3} = 2 \frac{\rho_0 v_{\varphi_0} v_{\varphi_0}}{(\rho_0 - v_{\varphi_0} t)^3},$$

$$\ddot{z} = -gt, \quad \ddot{z} = -g.$$

Protože $\rho_0 - v_{\varphi_0} t = \rho$ (podle zadání), můžeme také zapsat

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_0 v_{\varphi_0}}{\rho^2}; \quad \ddot{\varphi} = 2 \frac{\rho_0 v_{\varphi_0} v_{\varphi_0}}{\rho^3}.$$

Dosazením do (1), (2) a (3) uskočíme dále

$$F_p = m \left[0 - \rho \left(\frac{\rho_0 v_{\varphi_0}}{\rho^2} \right)^2 \right] = -m \frac{\rho_0^2 v_{\varphi_0}^2}{\rho^3}$$

$$F_{\varphi} = m \left[\cancel{2 \frac{\rho_0 v_{\varphi_0} v_{\varphi_0}}{\rho^3}} + 2(-v_{\varphi_0}) \frac{\rho_0 v_{\varphi_0}}{\rho^2} \right] = 0$$

$$F_z = m(-g) = -mg.$$

DYN-02-1.2

Radialní síla F_p má zápornou znaménko, takže působí směrem do středu vln. Je důsledkem hydrostatických sil v okolí kapeliny. Transverzální síla F_{φ} je nulová. Je to ilustrace zákona zachování momentu hybnosti, kterým budeme probírat poději. Axialní síla F_z je tíhová síla sdíleje.