

Příklad 2.2. I. úloha dynamiky (kinetostatika) pro vřtaný pohyb tuhého tělesa.
 Hmotný bod D se pohybuje po drsné přímce mezi pevnými body A a B. Akčními silami působícími na hmotný bod D jsou tíže $\vec{G}$ ve směru řadového tíhového zrychlení $\vec{g}$, tažná síla $\vec{F}$ ve směru přímky AB a síla $\vec{P}$ pružiny ukotvené v pevném bodě C. Volná délka pružiny je kratší, než nejmenší vzdálenost mezi přímkou AB a bodem C.

Dáno:

souřadnice $x_A=0, y_A, z_A$ bodu A,

$x_B, y_B=0, z_B$ bodu B,

$x_C=0, y_C=0, z_C$ bodu C,

hmotnost m_D bodu D,

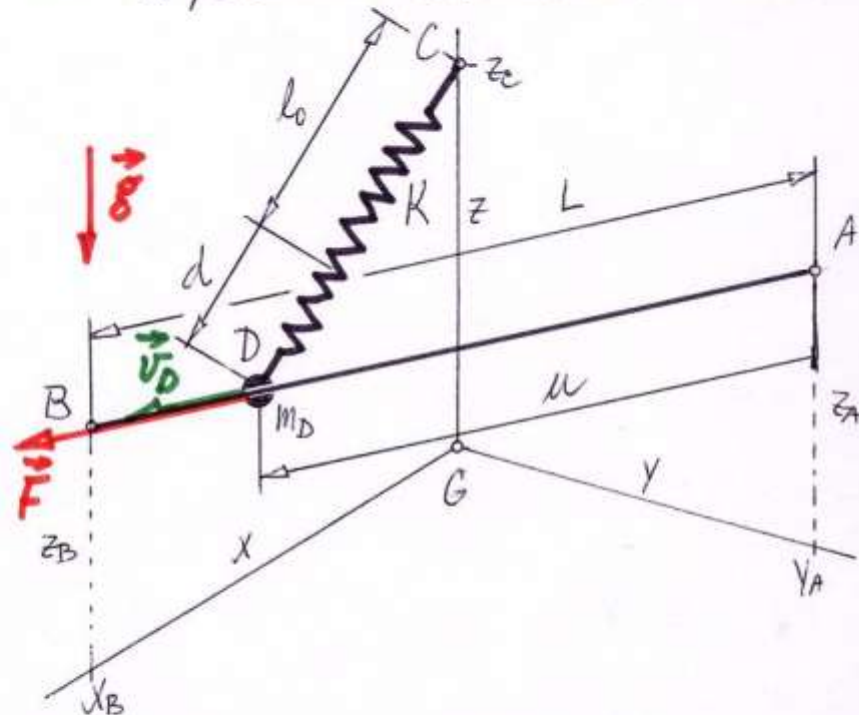
volná délka l_0 a konst. tuhosti K pružiny, koeficient smykového tření f na přímce AB,

DYN-02-2.1

rychlost v_D bodu D jako funkce polohy u

$$v_D(u) = V_0 \left(1 - \frac{u}{L}\right),$$

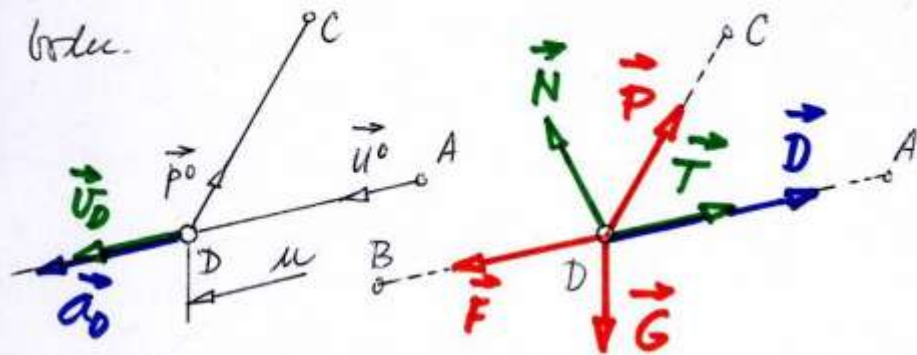
kde V_0 je daná konstanta a $L = \overline{AB}$.



Určit: Velikosti F, P akčních sil a reakcí N, T jako funkce obecné polohy u .

Řešení: Nejprve nakreslíme kin-

metické schéma a uvolnění limitních bodů.



Pomocí schématu uvolnění uapišme rovnici dynamického rovnováhy.

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{D} = \vec{0}. \quad (1)$$

zde tíhová síla

$$\vec{G} = -m_D g \vec{k}, \quad (2)$$

tažná síla

$$\vec{F} = F \vec{u}^0, \quad (3)$$

síla pružiny

$$\vec{P} = P \vec{p}^0, \quad P = Kd, \quad (4, 5)$$

normální reakční síla

$$\vec{N} = N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k}, \quad \vec{N} \cdot \vec{u}^0 = 0, \quad (6, 7)$$

traci síla

$$\vec{T} = -f N \vec{u}^0 = -f \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} \vec{u}^0 \quad (8)$$

a dynamická síla d'Alembertova

$$\vec{D} = -m_D a_D \vec{u}^0. \quad (9)$$

Geometrické a kinematické rovnice jsou:

• pro délku úsečky AB

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{x_B^2 + y_A^2 + (z_B - z_A)^2}, \quad (10)$$

• pro jednotkový vektor $\vec{u}^0$ úsečky AB

$$\vec{u}^0 = u_x^0 \vec{i} + u_y^0 \vec{j} + u_z^0 \vec{k}, \quad (11)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} u_x^0 &= \frac{x_B - x_A}{L} = \frac{x_B}{L} \\ u_y^0 &= \frac{y_B - y_A}{L} = -\frac{y_A}{L} \\ u_z^0 &= \frac{z_B - z_A}{L} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

• pro polohový vektor $\vec{r}_D$ bodu D

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + u \vec{u}^0 = x_D \vec{i} + y_D \vec{j} + z_D \vec{k}, \quad (13)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} x_D &= x_A + u \frac{x_B}{L} = u \frac{x_B}{L} \\ y_D &= y_A - u \frac{y_A}{L} \\ z_D &= z_A + u \frac{z_B - z_A}{L} \end{aligned} \right\} (14)$$

• pro jednotkový vektor $\vec{p}^0$ platí

$$\vec{p}^0 = p_x^0 \vec{i} + p_y^0 \vec{j} + p_z^0 \vec{k}, \quad (15)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} p_x^0 &= \frac{x_C - x_D}{l_0 + d} = -\frac{u x_B}{L(l_0 + d)} \\ p_y^0 &= \frac{y_C - y_D}{l_0 + d} = -\frac{y_A(u - L)}{L(l_0 + d)} \\ p_z^0 &= \frac{z_C - z_D}{l_0 + d} = \frac{L(z_C - z_A) - u(z_B - z_A)}{L(l_0 + d)} \end{aligned} \right\} (16)$$

• pro náložnost $\overline{DC}$

$$\begin{aligned} l_0 + d &= \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \\ &= \sqrt{\left(x_B \frac{u}{L}\right)^2 + \left(y_A \frac{L-u}{L}\right)^2 + \left[z_C - z_A + (z_B - z_A) \frac{u}{L}\right]^2} \end{aligned}$$

učebci

DYN-02-2.5

$$d = \sqrt{\left(x_B \frac{u}{L}\right)^2 + \left(y_A \frac{L-u}{L}\right)^2 + \left[z_C - z_A + (z_B - z_A) \frac{u}{L}\right]^2} - l_0 \quad (17)$$

• a pro zrychlení a_D bude

$$a_D = v_D \frac{dv_D}{du} = -\frac{V_0^2}{L} \left(1 - \frac{u}{L}\right). \quad (18)$$

Dosažením (11) a (15) do (3), (4), (8)

a (9) můžeme vyjádřit rovnici (1)

napisat do složek

$$\left. \begin{aligned} (F - f\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} - m_D a_D) u_x^0 + P p_x^0 + N_x &= 0 \\ (F - f\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} - m_D a_D) u_y^0 + P p_y^0 + N_y &= 0 \\ (F - f\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} - m_D a_D) u_z^0 + P p_z^0 - m_D g + N_z &= 0 \end{aligned} \right\} (19)$$

Z těchto rovnic bychom vyjádřit mohli
vypočítat N_x, N_y, N_z pro dosažení
do podmínky kolmosti (7). To je
ale velmi obtížné kvůli čtení

$f \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$. Omeztíme se proto jen
 na případ dokonale lisovité úsečky
 $\overline{AB}$, tj. na případ $f=0$. Soustava
 (11) má pak tvar

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -(F - m_D a_D) u_x^0 - P p_x^0 \\ N_y &= -(F - m_D a_D) u_y^0 - P p_y^0 \\ N_z &= -(F - m_D a_D) u_z^0 - P p_z^0 + m_D g, \end{aligned} \right\} (20)$$

které můžeme dosadit do podmínky
 (7) napsané ve skalárním tvaru

$$N_x u_x^0 + N_y u_y^0 + N_z u_z^0 = 0.$$

Dostaneme jediný vztah

$$\begin{aligned} &-(F - m_D a_D)(u_x^{0^2} + u_y^{0^2} + u_z^{0^2}) + m_D g u_z^0 - \\ &- P(p_x^0 u_x^0 + p_y^0 u_y^0 + p_z^0 u_z^0) = 0 \end{aligned}$$

Pročťe u_x^0, u_y^0, u_z^0 jsou složky jednotkového
 vektoru, je $(u_x^{0^2} + u_y^{0^2} + u_z^{0^2}) = 1$, takže

$$F - m_D a_D = m_D g u_z^0 - P(p_x^0 u_x^0 + p_y^0 u_y^0 + p_z^0 u_z^0)$$

Při dosazení z (5), (12) a (16) bude
 2. člen na pravé straně

$$K d \frac{-u x_B^2 + (u-L) y_A^2 + [L(z_B - z_A) - u(z_B - z_A)](z_B - z_A)}{L^2(l_0 + d)},$$

takže

$$\begin{aligned} F(u) &= m_D \left[g \frac{z_B - z_A}{L} - \frac{V_0^2}{L} \left(1 - \frac{u}{L} \right) \right] - \\ &- \frac{K}{L^2} \frac{-u x_B^2 + (u-L) y_A^2 + [L(z_B - z_A) - u(z_B - z_A)](z_B - z_A)}{\frac{l_0}{d} + 1}, \end{aligned}$$

přičemž rovněž $l_0 d$ závisí podle (17)
 na u :

$$\frac{l_0}{d} = \frac{l_0}{\sqrt{\left(x_B \frac{u}{L}\right)^2 + \left(y_A \frac{L-u}{L}\right)^2 + \left[z_B - z_A + (z_B - z_A) \frac{u}{L}\right]^2} - l_0}$$

Další pokračování funkce jsou

$$\Phi(u) = Kd =$$

$$= K \sqrt{\left(x_B \frac{u}{L}\right)^2 + \left(y_A \frac{L-u}{L}\right)^2 + \left[z_C - z_A + (z_B - z_A) \frac{u}{L}\right]^2} - K l_0,$$

Složky N_x, N_y, N_z síly $\vec{N}$ mohou být
množství a rovněž smysly (20).

Tržní síla $\vec{T}$ je pro všechny jedno-
dušné případy nulová.