

Příklad 2.3. Pad koule v odporujícím prostředí. (II. úloha dynamiky pro HB.)

Dáno:

- parametry koule:

poloměr r ,

hustota ρ_k ,

odp. koeficient c_x ;

- parametry prostředí:

hustota ρ_0 ;

- tíhové zrychlení $\vec{g}$;

- odporová síla (tzv. kvadratická)

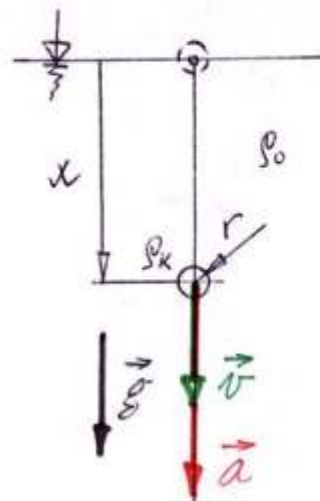
$$F = c_x \pi r^2 \frac{\rho_0}{2} v^2$$

- počáteční podmínka pro rychlost

$$v(0) = 0$$

Uvít: Získejte $v(x)$ rychlosti ve dráze, asymptotickou rychlost

$$v_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x)$$



Řešení:

DYN-02-3.1

Začínáme se uvolňujeme v obecné poloze.



Zakreslíme vektory tíhy $\vec{G}$, vztlaku $\vec{V}$, odporové síly $\vec{F}$ a dynamické síly $\vec{D}$.

Vektorová rovnice dynamického rovnováhy pak je

$$\vec{G} + \vec{V} + \vec{F} + \vec{D} = \vec{0} \quad (1)$$

Jednotlivé síly vyjádříme pomocí jednotkového vektoru $\vec{i}$

$$\vec{G} = G \vec{i}$$

$$\vec{V} = -V \vec{i}$$

$$\vec{F} = -F \vec{i}$$

$$\vec{D} = -D \vec{i}$$

$$\vec{0} = 0 \vec{i}$$

Po dosazení do (1) můžeme hodnotou $\vec{i}$ krátit a zůstane skalární rovnice

$$G - V - F - D = 0 \quad (2)$$

Tíhne G vypočítame z objemu a hustoty

$$G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g.$$

Vzhľad podľa Archimedova zákona z objemu a hustoty obklopeného prostredia

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g.$$

Odporová sila je rodná. Dynamická

$$\text{сила } D = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k a,$$

kladná, pretože orientácia proti kladnému zrychleniu je akceptovaná, čiže v rovnovážnom stave.

Dostaneme do (2) dostávame

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_k g - \rho_0 g - \rho_k a) - c_x \pi r^2 \frac{\rho_0}{2} v^2 = 0,$$

čo upravíme na tvar

DYN-02-3.2

$$\rho_k a + \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2 = g(\rho_k - \rho_0) \quad (3)$$

Nakoniec uploťme kinematicky. Pretože rýchlosť v môžeme vypočítať ako funkciu polohy x , použijeme pre zrychlenie

$$a = v \frac{dv}{dx}.$$

Po dosadení do (3) dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\rho_k v \frac{dv}{dx} + \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2 = g(\rho_k - \rho_0),$$

ktorú by sme mohli separovať promenných.

Separovaný tvar je

$$\frac{\rho_k v dv}{g(\rho_k - \rho_0) - \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2} = dx.$$

Integrácia v korešpondujúcej rovnici s priradením k daným parametrom

prodeine

$$\int_0^{v(x)} \frac{v dv}{g(\rho_k - \rho_0) - \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2} = \frac{1}{\rho_k} \int_0^x dx \quad (4)$$

se provede pomocí substituce

$$g(\rho_k - \rho_0) - \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2 = u$$

$$-\frac{3}{4} c_x \frac{\rho_0}{r} v dv = du$$

$$v=0 : u = g(\rho_k - \rho_0)$$

Pomocí (4) se tak lze u

$$g(\rho_k - \rho_0) - \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2$$

$$\int \frac{du}{u} = - \frac{3 c_x \rho_0}{4 r \rho_k} \int_0^x dx$$

$$g(\rho_k - \rho_0)$$

tak po integraci máme

DYN-02-3.3

$$\ln \frac{(\rho_k - \rho_0)g - \frac{3}{8} c_x \frac{\rho_0}{r} v^2}{(\rho_k - \rho_0)g} = - \frac{3 c_x \rho_0}{4 r \rho_k} x$$

Odlogaritmuje se a upravíme

$$1 - \frac{3 c_x \rho_0}{8 g r (\rho_k - \rho_0)} v^2 = e^{- \frac{3 c_x \rho_0}{4 r \rho_k} x}$$

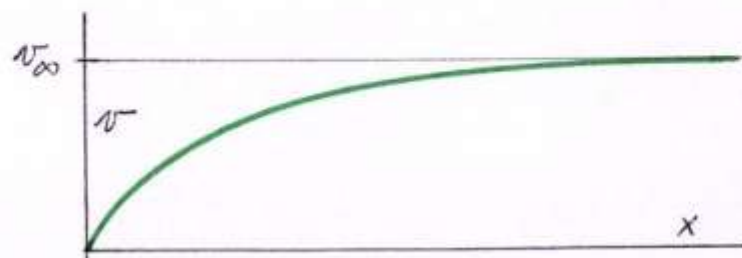
takže uctonoe

$$v^2 = \frac{8 g r \rho_k - \rho_0}{3 c_x \rho_0} \left(1 - e^{- \frac{3 c_x \rho_0}{4 r \rho_k} x} \right)$$

připadne

$$v = \sqrt{\frac{8 g r \rho_k - \rho_0}{3 c_x \rho_0} \left(1 - e^{- \frac{3 c_x \rho_0}{4 r \rho_k} x} \right)}$$

Graf $v(x)$



DYN-02-3.4

ukazuje na existenci asymptotické
rychlosti v_∞ . Její hodnota bude

$$v_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{g r}{c_x} \frac{\rho_k - \rho_0}{\rho_0}}$$