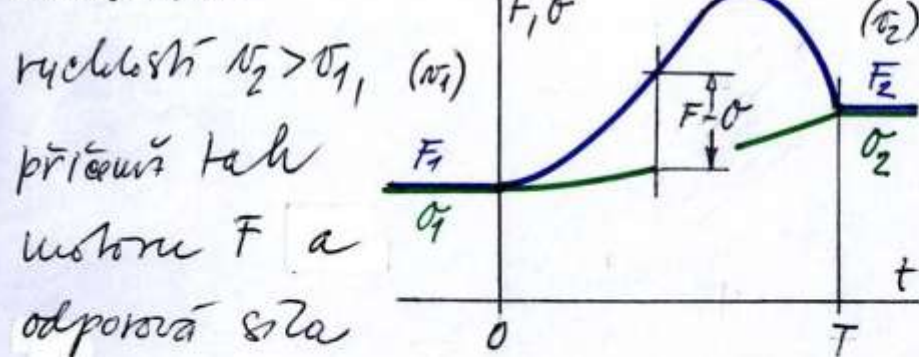


# Příklad 4.1 Věta o změně hybnosti HB.

Dáno: Letadlo ਦੇਣੇ hmotnosti  $M$  letí v horizontálnímu letu v case  $t < 0$  konstantní rychlostí  $v_1$  a v case  $t > T$  konstantní rychlostí  $v_2 > v_1$ .



přičemž tah motoru  $F$  a odporová síla  $\sigma$  jsou stejné (příč?). V intervalu  $0 \leq t \leq T$  zvyšuje tah  $F$  odporovou sílu  $\sigma$  o hodnotu

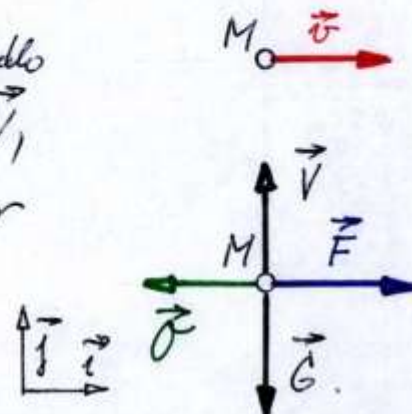
$$F(t) - \sigma(t) = K \left( \frac{t}{T} \right)^2 \left( 1 - \frac{t}{T} \right).$$

Určete: konstantu  $K$  a vztah konstanty  $K$  k maximu ਦੇਣੇ funkce.

Řešení:

DYN-04-1.1

Síly působící na letadlo jsou tíže  $\vec{G}$ , tlak  $\vec{V}$ , tah motoru  $\vec{F}$  a odporová síla  $\vec{\sigma}$  podle obrázku.



Věta o změně hybnosti hmotného bodu psaná uvnitř omezení  $0$  a  $T$  je v daném případě

$$\vec{p}(T) - \vec{p}(0) = \int_0^T (\vec{G} + \vec{F} + \vec{V} + \vec{\sigma}) dt. \quad (1)$$

Jednotlivé síly jsou

$$\vec{G} = -Mg\vec{j}, \quad \vec{F} = F\vec{i},$$

$$\vec{V} = V\vec{j}, \quad \vec{\sigma} = -\sigma\vec{i}.$$

Hybnosti podle zadání jsou

$$\vec{p}(T) = Mv_2\vec{i}, \quad \vec{p}(0) = Mv_1\vec{i}$$

Dosazení do rovnice (1) tak bude

$$(Mv_2 - Mv_1)\vec{i} = \int_0^T (F - 0) dt \vec{i} + \int_0^T (V - G) dt \vec{j}.$$

V horizontálnímu lehu není žádný vliv vzdušného odporu, tj.  $V = G$  a druhý integrál je identicky roven nule.

Zbývá tedy rovnice ve směru  $\vec{i}$ :

$$Mv_2 - Mv_1 = \int_0^T (F - 0) dt. \quad (2)$$

Ukážeme, že  $F - 0$  je zadáno jako funkce času. Tedy

$$\int_0^T (F - 0) dt = K \int_0^T \left(\frac{t}{T}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt. \quad (3)$$

Integrál na pravé straně můžeme řešit třeba substitucí

$$\frac{t}{T} = u; \quad dt = T du,$$

$$t=0: u=0; \quad t=T: u=1.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{t}{T}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt &= T \int_0^1 (u^2 - u^3) du = \\ &= T \left[ \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = T \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{T}{12} \end{aligned}$$

Podle (3) je tedy

$$\int_0^T (F - 0) dt = \frac{KT}{12}$$

a dosažení do (2) dává

$$M(v_2 - v_1) = \frac{KT}{12}.$$

Z toho hledáme konstantu

$$K = \frac{12 M(v_2 - v_1)}{T}.$$

Nakonec musíme uvést, jaký je skutečný  
 koeficient  $K$  k maximum dané funkce  
 $F(t) - O(t)$ . Maximum uostřívá, je-li  
 derivace funkce podle uostřívající  
 proměnné rovna nule. Tedy

$$\frac{d}{dt}(F - O) = 0$$

Derivace je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ K \left( \frac{t}{T} \right)^2 \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \right] &= K \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{t}{T} \right)^2 - \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right] = \\ &= K \left[ 2 \left( \frac{t}{T} \right) \frac{1}{T} - 3 \left( \frac{t}{T} \right)^2 \frac{1}{T} \right] = \frac{K}{T} \left( \frac{t}{T} \right) \left[ 2 - 3 \left( \frac{t}{T} \right) \right], \end{aligned}$$

takže rovnice pro extrém je

$$\frac{K}{T} \left( \frac{t}{T} \right) \left( 2 - 3 \frac{t}{T} \right) = 0.$$

Ta má dvě řešení.

DTN-04-1.5

$$t_1^* = 0,$$

plně zřejmě pro minimum, a

$$t_2^* = \frac{2}{3} T.$$

Přistoupíme k hodnotě dané funkce je  
 pak

$$F(t_2^*) - O(t_2^*) = K \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{27} K.$$

To je už hledaný skutečný  
 maximum funkce a konstantou  $K$ .

$$(F - O)_{\max} = \frac{4K}{27}.$$