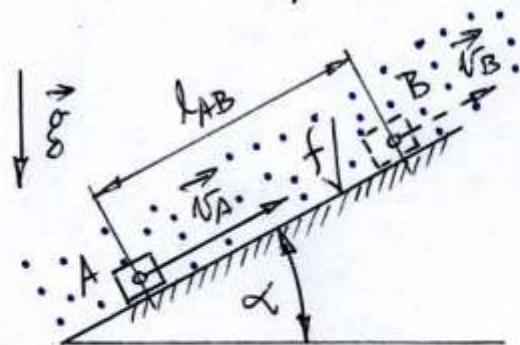


Příklad 4.2 Dynamika hmotného bodu;
použití věty o změně kinetické energie.
Hmotný bod se pohybuje po dráze
máhlové roviny směrem nahoru
při vzáporné "lineárního" odporu pro-
středí.

Dáno:

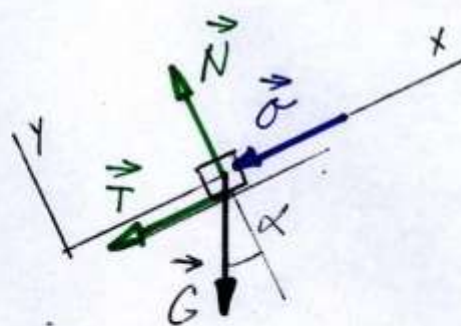
- úhel α máhlové roviny;
- koeficient f suchého tření;
- odporová síla $\sigma = 2\mu v$ odporujícího prostředí;
- hmotnost m hmotného bodu;
- vzdálenost l_{AB} mezi dvěma polohami A, B ;
- doba t_{AB} průchodu HB mezi polohami A, B ;

Určit: rychlosti $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ v polohách A, B .



Řešení:

Použijeme větu o změně kinetické energie HB v diferenciální tvaru. Schéma uvolnění neobsahuje v tomto případě dynamickou sílu. Souřadnicový systém (x, y) orientujeme s nulkou podle máhlové roviny. Výsledná síla působící na HB



$$\text{je } \vec{F} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{\sigma},$$

kde

$$G = mg, \quad T = fN, \quad \sigma = 2\mu v.$$

V složkách

$$F_x = -mg \sin \alpha - T - \sigma \quad (1)$$

$$F_y = N - mg \cos \alpha.$$

Pročže k pohybu ve směru y

ve směru y , musí být $F_y = 0$, neboť

$$N - mg \cos \alpha = 0.$$

Z toho

$$N = mg \cos \alpha$$

a můžeme dosadit do (1).

$$F_x = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha - 2\mu v,$$

po úpravě

$$F_x = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) - 2\mu v.$$

Pro zjednodušení zavedeme

$$g' = g(\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

takže

$$F_x = -mg' - 2\mu v. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že kinetická energie používáme nejprve ve tvaru

$$a) \quad dK = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy = F_x dx.$$

Protože

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

je

$$dK = \frac{1}{2}m2v dv = mv dv$$

a po dosazení máme diferenciální rovnici

$$mv dv = -(mg' + 2\mu v) dx,$$

která nám není správně separovaná.

Separace

$$\frac{v dv}{mg' + 2\mu v} = -\frac{1}{m} dx$$

umožní integrovat mezi polohami A a B

$$\int_{v_A}^{v_B} \frac{v dv}{mg' + 2\mu v} = -\frac{1}{m} \int_{x_A}^{x_B} dx. \quad (3)$$

Na levé straně použijeme substituci

$$mg' + 2\mu v = u, \quad v = \frac{u - mg'}{2\mu}$$

$$dv = \frac{du}{2\mu},$$

takže

$$\int_{v_A}^{v_B} \frac{v dv}{mg' + 2\mu v} = \frac{1}{4\mu^2} \int_{u_A}^{u_B} \left(1 - \frac{mg'}{\mu}\right) du =$$

$$= \frac{1}{4\mu^2} \left(u_B - u_A - mg' \ln \left| \frac{u_B}{u_A} \right| \right).$$

Integrál na pravé straně rovnice (3)

je

$$\int_{x_A}^{x_B} dx = x_B - x_A = l_{AB}.$$

Výsledkem integrace je tedy

$$\frac{1}{4\mu^2} \left(2\mu v_B - 2\mu v_A - mg' \ln \frac{mg' + 2\mu v_B}{mg' + 2\mu v_A} \right) = -\frac{l_{AB}}{m}$$

resp. po úpravě

$$\frac{m}{2\mu} \left(v_B - v_A - \frac{mg'}{2\mu} \ln \frac{1 + \frac{2\mu}{mg'} v_B}{1 + \frac{2\mu}{mg'} v_A} \right) = -l_{AB}. \quad (4)$$

To je první rovnice pro v_A, v_B .

Větu o změně kinetické energie použijeme nyní ve tvaru

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v. \quad (5)$$

Zde

$$\frac{dK}{dt} = \frac{mv dv}{dt} = mv \frac{dv}{dt},$$

takže po dosazení do (5) s použitím (2)

máme

$$m \cancel{v} \frac{dv}{dt} = -(mg' + 2\mu v) \cancel{v}.$$

Po krácení v můžeme rovnici separovat do tvaru

$$\frac{dv}{mg' + 2\mu v} = -\frac{dt}{m}$$

a integrovat mezi časy t_A, t_B příslušnými HB polohami A a B.

$$\int_{v_A}^{v_B} \frac{dv}{u g' + 2\mu v} = -\frac{1}{m} \int_{t_A}^{t_B} dt. \quad (6)$$

Integrál na levé straně řešíme stejnou substitucí jako nřše:

$$\begin{aligned} \int_{v_A}^{v_B} \frac{dv}{u g' + 2\mu v} &= \frac{1}{2\mu} \int_{u_A}^{u_B} \frac{du}{u} = \frac{1}{2\mu} \ln \left| \frac{u_B}{u_A} \right| = \\ &= \frac{1}{2\mu} \ln \frac{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_B}{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_A}. \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně je

$$\int_{t_A}^{t_B} dt = (t_B - t_A) = t_{AB},$$

takže následek integrace (6) je

$$\frac{m}{2\mu} \ln \frac{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_B}{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_A} = -t_{AB}. \quad (7)$$

Rovnice (4) a (7) jsou nyní dvě rovnice pro dvě neznámé v_A, v_B . Pro řešení využijeme toho, že obě rovnice obsahují stejný člen s logaritmem.

Ze (7) tedy

$$\ln \frac{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_B}{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_A} = -\frac{2\mu}{m} t_{AB} \quad (8)$$

a dořekneme do (4)

$$v_B - v_A + g' t_{AB} = -\frac{2\mu}{m} t_{AB},$$

což dává

$$v_B = v_A - g' t_{AB} - \frac{2\mu}{m} t_{AB}. \quad (9)$$

Odlogaritmování rovnice (8)

$$\frac{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_B}{1 + \frac{2\mu}{u g'} v_A} = e^{-\frac{2\mu}{m} t_{AB}}$$

a dosazemi' za v_B

DYN-04-2.5

$$\frac{1 + \frac{2\mu}{m g'} v_A - \frac{2\mu}{m} t_{AB} - \left(\frac{2\mu}{m}\right)^2 \frac{l_{AB}}{g'}}{1 + \frac{2\mu}{m g'} v_A} = e^{-\frac{2\mu}{m} t_{AB}}$$

da'va'

$$1 - \frac{\frac{2\mu}{m} t_{AB} + \frac{2\mu l_{AB}}{m g'}}{1 + \frac{2\mu}{m g'} v_A} = e^{-\frac{2\mu}{m} t_{AB}}$$

Z toho

$$v_A = g' \left(\frac{t_{AB} + \frac{2\mu}{m g'} l_{AB}}{1 - e^{-\frac{2\mu}{m} t_{AB}}} - \frac{m}{2\mu} \right)$$

Nakonec se můžeme v_B z rovnice (9).