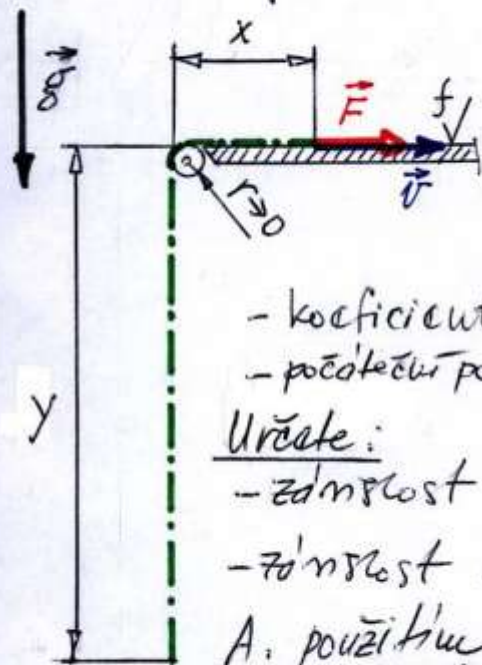


Příklad 7.1. Věta o změně kinetické energie resp. dynamika hmotného tělesa s proměnnou hmotností.

Dokonalé ohebné lano dané délky a dané hmotnosti je vytahováno z původní svislé polohy přes kladku zanedbatelného průměru na drsnou vodorovnou podložku. Dáno:



- délka lano L ;
- hmotnost lano m ;
- tahová síla $F = 2mg$;

- koeficient smykového tření f ;
- počáteční podmínky $x(0) = v(0) = 0$;

Určete:

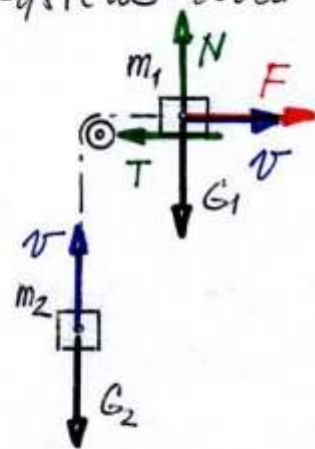
- změnu $x(t)$ délky x no čas t ;
- rychlost $v(t)$ rychlosti lano $v(t)$;

A. použít věty o změně kinetické energie;

B. aplikací pohybové rovnice

pro hmotný bod s proměnnou hmotností.

Řešení A: V obecné poloze tvoří lano systém dvou různých zatížených kusů.



Rychlosti obou kusů jsou v absolutní hodnotě v stejné; pro kusy m_1 vodorovně doprava, pro kus m_2 svisle vzhůru.

Větu o změně kinetické energie použijeme v dif. tvaru

$$\frac{dK}{dt} = P, \quad (1)$$

kde výkon P působících sil je

$$P = (F - T)v - G_2 v. \quad (2)$$

Sílu T určíme ze statiky

$$T = fN,$$

když N vyplývá z rovnováhy kusy m_1

ve smyslu směru

$$N - G_1 = 0.$$

Hmotnosti m_1, m_2 jsou částečně
hmotnosti m proporcionální k délkám
 x, y . Tedy

$$m_1 = \frac{m}{L} x \quad ; \quad m_2 = \frac{m}{L} y,$$

tedy

$$G_1 = \frac{m}{L} x g \quad , \quad G_2 = \frac{m}{L} y g.$$

Dosazení do (2) tak dá

$$P = \left(F - f \frac{m}{L} g x - \frac{m}{L} g y \right) v.$$

Protože každý bod lana se pohybuje
stejnou rychlostí v je kinetická
energie

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

a tedy

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} m \cancel{2} v \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{dt}.$$

Dosazení do (1) dá

$$m \cancel{v} \frac{dv}{dt} = \left(F - f \frac{m}{L} g x - \frac{m}{L} g y \right) \cancel{v}.$$

Nakonec dosadíme zadanou konstantu
velikost třecí síly $F = 2mg$ a $y = L - x$.

Dosažeme

$$\cancel{m} \frac{dv}{dt} = \cancel{m} g + \frac{m}{L} g (1-f) x.$$

Protože obažítá rychlost lana je

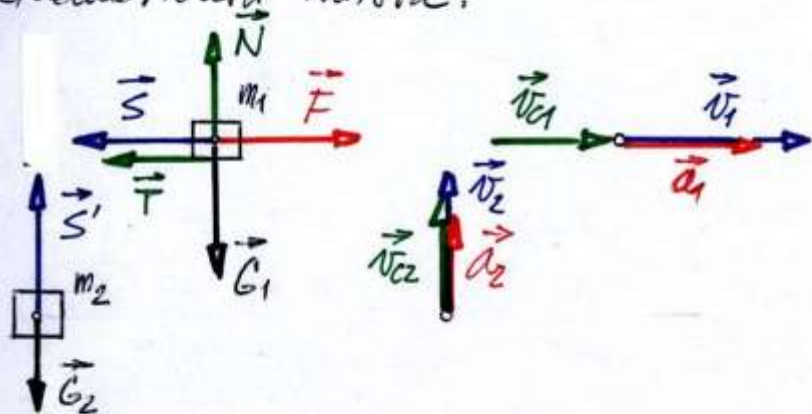
$$v = \frac{dx}{dt}$$

dosažíme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{g}{L} (1-f) x = g, \quad (3)$$

druháho řádu s konstantními koeficienty,
nehomogenní.

Řešení B: Lano v obecné poloze uvažujeme jako systém dvou hmotných bodů s proměnnými hmotami vzájemných kinematických vazeb.



Do obrázku uvolueme zakreslíme působení síly (např. mimo dynamických a reakčních) a do kinematického schématu zrychlení a rychlosti včetně rychlosti čistě vstupujících do resp. vystupujících z jednotných hmotných bodů. Pohybové rovnice napíšeme pro

oba hmotné body viprove vektorem

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{S} + m_1 \vec{u}_1$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{S}' + m_2 \vec{u}_2$$

a pak ve statice

$$x: m_1 a_1 = F - T - S + m_1 (v_{c1} - v_1),$$

$$y: 0 = N - G_1,$$

$$x: 0 = 0,$$

$$y: m_2 a_2 = S - G_2 + m_2 (v_{c2} - v_2).$$

Specifikace sil

$$G_1 = m_1 g, \quad G_2 = m_2 g, \quad T = fN$$

vztáhneme o specifikaci hmot

$$m_1 = \frac{M}{L} x, \quad m_2 = \frac{M}{L} (L - x).$$

Kinematické rovnice jsou

$$a_1 = a_2 = a, \quad a = \frac{dv}{dt}$$

$$v_1 = v_2 = v, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Huota utývá v obě 2 rychlosti

$$v_{02} = v$$

stejnou, jako v obě 1 přibývá, tj.

$$v_{01} = v.$$

Po dosazení do přibývajících rovnice máme

$$\frac{m}{L}x \frac{d^2x}{dt^2} = F - f \frac{m}{L}xg - S$$

$$\frac{m}{L}(L-x) \frac{d^2x}{dt^2} = S - \frac{m}{L}(L-x)g.$$

Sčtením obou rovnic dostaneme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - mg + \frac{m}{L}g(1-f)x,$$

což po dosazení za F a úpravě dává rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{L}(1-f)x = g$$

stejnou jako výše.

Řešení diferenciální rovnice

předpokládáme ve tvaru

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

kde x_h je řešení odpovídající rovnice homogenní

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} - \frac{g}{L}(1-f)x_h = 0 \quad (4)$$

a x_p je řešení partikulární.

Řešení x_h najdeme cestou charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - \frac{g}{L}(1-f) = 0$$

s kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}.$$

Fundamentální systém dané dif. rovnice tak tvoří funkce

$$e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t}, e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t}.$$

Partikulární integrál x_p odhadneme jako konstantu, protože pravá strana diferenciální rovnice je také konstantní.

Tedy

$$x_p = C$$

a dosazení do (3) dává

$$-\frac{g}{L}(1-f)C = g,$$

takže

$$C = -\frac{L}{1-f}.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (3) je tak

$$x(t) = A e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t} + B e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t} - \frac{L}{1-f}, \quad (5)$$

kde A, B jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek. Pro použití počátečních podmínek pro rychlost musíme nejprve rychlost vypočítat derivací (5).

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)} \left[A e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t} - B e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t} \right]. \quad (6)$$

Dosazení počátečních podmínek:

$$x(0) = A + B - \frac{L}{1-f} = 0$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)} (A - B) = 0$$

dává rovnici

$$A = B = \frac{L}{2(1-f)}.$$

Dosazení zpět do (5) dává

$$x(t) = \frac{L}{1-f} \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}t}}{2} - 1 \right]$$

resp.

$$x(t) = \frac{L}{1-f} \left[\cosh \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)} t - 1 \right] \quad (7)$$

Probleh rychlosti dostaneme dosazením
A, B do (6) a nebo jednodušeji do vřo-
vnicu (7).

$$v(t) = \frac{L \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)}}{1-f} \sinh \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)} t$$

resp. po úpravě

$$v(t) = \sqrt{\frac{gL}{1-f}} \sinh \sqrt{\frac{g}{L}(1-f)} t.$$