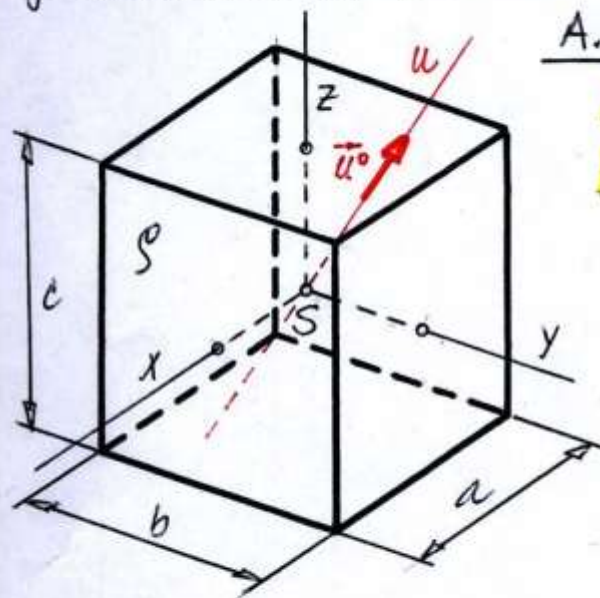


Příklad 8.1. Kvadratické momenty
jednoduchých těles.



A. Dáno:

Homogenní
hranol s hustotou ρ a rozměry a, b, c .

Určit:

- moment setrvačnosti pro centrální souřadnicový

system (S, x, y, z) ;

- moment setrvačnosti k tělesové úhlopříčce u .

Řešení:

Momenty setrvačnosti J_x, J_y, J_z k osám x, y, z můžeme např. pomocí momentů k souřadnicovým rovinám $(xy), (yz)$ a

(zx, yz) . Platí

$$J_{xy} = \int_{(m)} z^2 dm,$$

příčinný element hustoty dm můžeme mít jako

$$dm = \rho ab dz$$

(proč?). Integrujeme potom jevům pro integraci proměnnou z v mezích $-\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}$. Hustota je konstantní.

$$J_{xy} = \rho ab \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = \rho ab \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \frac{\rho abc^3}{12}$$

Protože celková hmotnost hranolu je

$$m = \rho abc,$$

můžeme napsat

$$J_{xy} = \frac{m}{12} c^2 \quad (1)$$

Momenty setrvačnosti k ostatním souřadnicovým rovinám můžeme

napísat přímo uživíme-li, že ve vztahu (1) je c rotací hranolu kolem osy z (x, y). Proto bude

$$J_{yz} = \frac{m}{12} a^2 \quad \text{a} \quad J_{zx} = \frac{m}{12} b^2.$$

Pro momenty setravnosti k souřadnicovým osám pak dostaneme

$$J_x = J_{zx} + J_{xy} = \frac{m}{12} b^2 + \frac{m}{12} c^2 = \frac{m}{12} (b^2 + c^2),$$

$$J_y = J_{xy} + J_{yz} = \frac{m}{12} c^2 + \frac{m}{12} a^2 = \frac{m}{12} (c^2 + a^2),$$

$$J_z = J_{yz} + J_{zx} = \frac{m}{12} a^2 + \frac{m}{12} b^2 = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$$

Danať momenty D_{xy} , D_{yz} , D_{zx} jsou nulové, protože těleso je trojúhelníkem symetrické kolem souřadnicových os.

Matice setravnosti je tedy

$$\mathbf{I} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu momentů setravnosti J_u k ose u musíme nejprve určit jednotkový vektor přímkou u v daném souřadnicovém systému.

$$\vec{u}^0 = \frac{\frac{a}{2} - (-\frac{a}{2})}{u} \vec{i} + \frac{\frac{b}{2} - (-\frac{b}{2})}{u} \vec{j} + \frac{\frac{c}{2} - (-\frac{c}{2})}{u} \vec{k},$$

$$\text{neboli} \quad \vec{u}^0 = \frac{a}{u} \vec{i} + \frac{b}{u} \vec{j} + \frac{c}{u} \vec{k},$$

$$\text{kde} \quad u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Dále

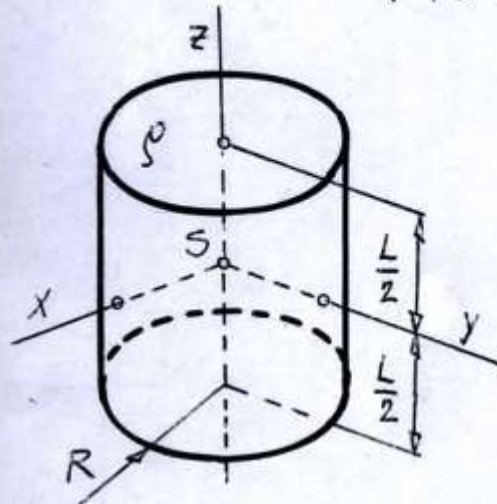
$$\mathbf{u}^0 = \frac{1}{u} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{0T} = \frac{1}{u} [a \ b \ c],$$

takto podle mace

$$J_u = \mathbf{u}^0 T \mathbf{u}^0 = \frac{m}{12u^2} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

a po provedení matizomzer operaci

$$J_u = \frac{m}{12} \cdot \frac{a^2(b^2+c^2) + b^2(c^2+a^2) + c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}$$



B. Dáno:

Homogenní válec
s hustotou ρ , s
poloměrem R a
s výškou (délkou)
 L .

Učít:

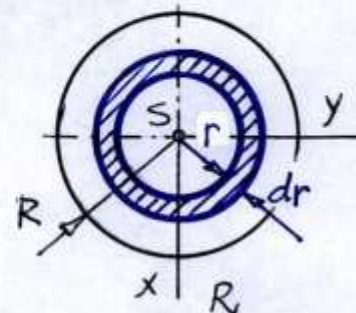
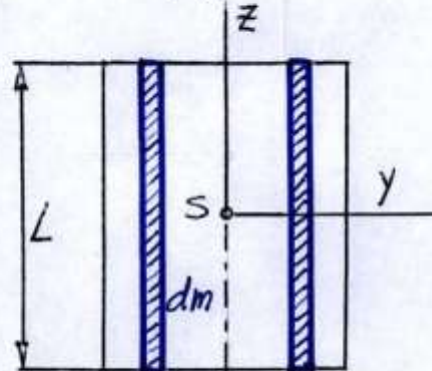
Matici setrvačnosti pro daný centrální souřadnicový systém (S, x, y, z) .

Řešení:

Zároveň momentem J_z k rotační ose z .

Podle definice

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm \quad (2)$$



Pro danou geometrii
má být za dan
výbrana "trubka"
s vnitřním poloměrem
 $0 \leq r \leq R$ a "tloušťkou"
stejnou dr (průřez). Pak

$$dm = \rho 2\pi L r dr$$

a integrace podle (2)
dává

$$J_z = 2\pi \rho L \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho L \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \rho \frac{\pi R^4 L}{2}$$

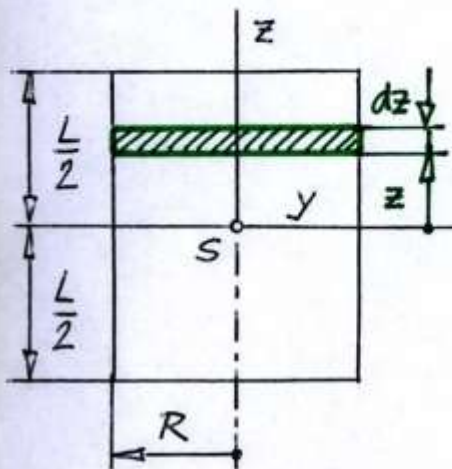
Protože celková hmotnost válce je

$$m = \rho \pi R^2 L$$

je

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Druhý moment setrvačnosti, který se
má vlnu snadno,



je

$$J_{xy} = \int z^2 dm. \quad (3)$$
 (m)

Element hmotnosti je

$$dm = \rho \pi R^2 dz$$

a integrace (3) dává

$$J_{xy} = \int \rho \pi R^2 z^2 dz = \rho \pi R^2 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho \pi R^2 L^3}{12}$$

a po zavedení celkové hmotnosti

$$J_{xy} = \frac{m}{12} L^2$$

Pro výpočet J_x a J_y nyní použijeme
vztahy

$$J_x = J_{zx} + J_{xy},$$

$$J_y = J_{xy} + J_{yz},$$

přičemž J_{zx} a J_{yz} máme z úvahy, že
pro rotačně symetrický těleso je

$$J_{zx} = J_{yz} \quad (\text{pro?}).$$

Pak musí být

$$J_{zx} = J_{yz} = \frac{J_z}{2} = \frac{m}{4} R^2.$$

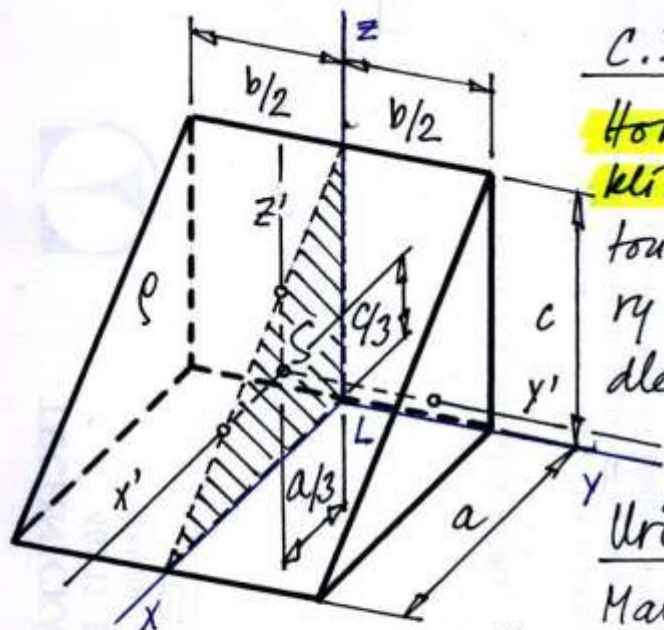
Nakonec tedy

$$J_x = J_y = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{L^2}{3} \right).$$

Těleso je opět trojnásobně symetrické
vzhledem k souřadnicovým rovinám,
takže $D_{xy} = D_{yz} = D_{zx} = 0$.

Matice setrvačnosti je tedy

$$\mathbf{J} = \frac{m}{4} \begin{bmatrix} R^2 + \frac{L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + \frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix}.$$



C. Dáno:

Homogenní
klín s husto-
tou ρ a rozmě-
ry a, b, c po-
dle obrázku.

Určit:

Matici setrvač-

nosti pro daný centrální souřadnicový
systém (S, x', y', z') .

Řešení:

Pro aplikaci vícenásobných integrálů
bude vhodnější zvolit posunutý souř.
systém (L, x, y, z) . Pak totiž ře-
tělasek v určité výšce z ,

$$0 \leq z \leq c$$

je obdélník

$$-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2},$$

$$0 \leq x \leq a(1 - \frac{z}{c})$$

(nakreslete!) a integrační meze jsou
jednodušší; pro libovolnou integrovanou
funkci $F(x, y, z)$ platí

$$\int_V F(x, y, z) dxdydz = \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{a(1-\frac{z}{c})} F(x, y, z) dxdydz.$$

Při konstantní hustotě ρ tak pro
jednotlivé prvky matice setrvačnosti
dostáváme

$$\begin{aligned} J_x &= \rho \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \int_0^{a(1-\frac{z}{c})} dxdydz = \\ &= \rho a \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) (1 - \frac{z}{c}) dydz = \\ &= \rho a \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2 - y^2 \frac{z}{c} - \frac{z^3}{c}) dydz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho a \int_0^c \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y - \frac{y^3 z}{3c} - \frac{z^3 y}{c} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \\
 &= \rho a \int_0^c \left(\frac{b^3}{12} + bz^2 - \frac{b^3 z}{12c} - \frac{z^3 b}{c} \right) dz = \\
 &= \rho a \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{bc^3}{3} - \frac{b^3 c}{24} - \frac{bc^3}{4} \right) = \\
 &= \rho abc \left(\frac{b^2}{24} + \frac{c^2}{12} \right) = \rho \frac{abc}{24} (b^2 + 2c^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_y &= \rho \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{c}(1-\frac{z}{c})} (z^2 + x^2) dx dy dz = \\
 &= \rho a \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[z^2 \left(1 - \frac{z}{c}\right) + \frac{a^2}{3} \left(1 - \frac{z}{c}\right)^3 \right] dy dz = \\
 &= \rho a \int_0^c \left[\frac{a^2}{3} - \frac{a^2 z}{c} + \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) z^2 - \left(\frac{1}{c} + \frac{a^2}{3c^3}\right) z^3 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy dz = \\
 &= \rho ab \left[\frac{a^2}{3} c - \frac{a^2 c}{2} + \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \frac{c^3}{3} - \frac{1}{c} \left(1 + \frac{a^2}{3c^2}\right) \frac{c^4}{4} \right] = \\
 &= \rho abc \left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{12} \right) = \rho \frac{abc}{12} (a^2 + c^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \rho \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{c}(1-\frac{z}{c})} (x^2 + y^2) dx dy dz = \\
 &= \rho a \int_0^c \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{a^2}{3} \left(1 - \frac{z}{c}\right)^3 + y^2 \left(1 - \frac{z}{c}\right) \right] dy dz = \\
 &= \rho a \int_0^c \left[\frac{a^2}{3} \left(1 - \frac{z}{c}\right)^3 y + \frac{y^3}{3} \left(1 - \frac{z}{c}\right) \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \\
 &= \rho ab \int_0^c \left[\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} - \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right) \frac{z}{c} + \frac{a^2}{3} \left(\frac{z}{c}\right)^2 - \frac{a^2}{3} \left(\frac{z}{c}\right)^3 \right] dz = \\
 &= \rho abc \left[\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right) + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12} \right] = \\
 &= \rho abc \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{24} \right) = \rho \frac{abc}{24} (b^2 + 2a^2).
 \end{aligned}$$

Integraci zbyřo' uyr' určit D_{zx} ,
protože $D_{xy} = D_{yz} = 0$ (proč?)

$$D_{zx} = \rho \int_0^c z \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{c}(1-\frac{z}{c})} x dx dy dz =$$

$$= \rho \frac{a^2}{2} \int_0^c z \left(1 - \frac{z}{c}\right)^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy dz =$$

$$= \rho \frac{a^2}{2} b \int_0^c \left(z - 2\frac{z^2}{c} + \frac{z^3}{c^2}\right) dz =$$

$$= \rho \frac{a^2}{2} b c^2 \left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \rho \frac{a^2 b c^2}{24}.$$

Zavedeme-li nyní do výsledku celkovou hmotnost klínu

$$m = \rho \frac{abc}{2},$$

jsou dle výsledku

$$J_x = \frac{m}{12} (b^2 + 2c^2), J_y = \frac{m}{6} (c^2 + a^2),$$

$$J_z = \frac{m}{12} (2a^2 + b^2), J_{zx} = \frac{m}{12} ac,$$

takže matice setrvačnosti v souř. systému (L, x, y, z) je

$$\mathbb{I} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + 2c^2 & 0 & -ac \\ 0 & 2c^2 + 2a^2 & 0 \\ -ac & 0 & 2a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Souřadnicový systém (L, x, y, z) je z těžiště S posunut vektorem posunutí

$$\vec{R} = -\frac{a}{3} \vec{i} - \frac{c}{3} \vec{k},$$

takže

$$X = -\frac{a}{3}, Y = 0, Z = -\frac{c}{3}$$

a matice Steinerových členů je

$$\mathbb{D} = \frac{m}{9} \begin{bmatrix} c^2 & 0 & -ac \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ -ac & 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

takže matice setrvačnosti $\mathbb{I}'$ pro (S, x', y', z') je

$$\mathbb{I}' = \mathbb{I} - \mathbb{D} = \frac{m}{36} \begin{bmatrix} 3b^2 + 2c^2 & 0 & ac \\ 0 & 2(c^2 + a^2) & 0 \\ ac & 0 & 2a^2 + 3b^2 \end{bmatrix}.$$

(proč?) $\uparrow$