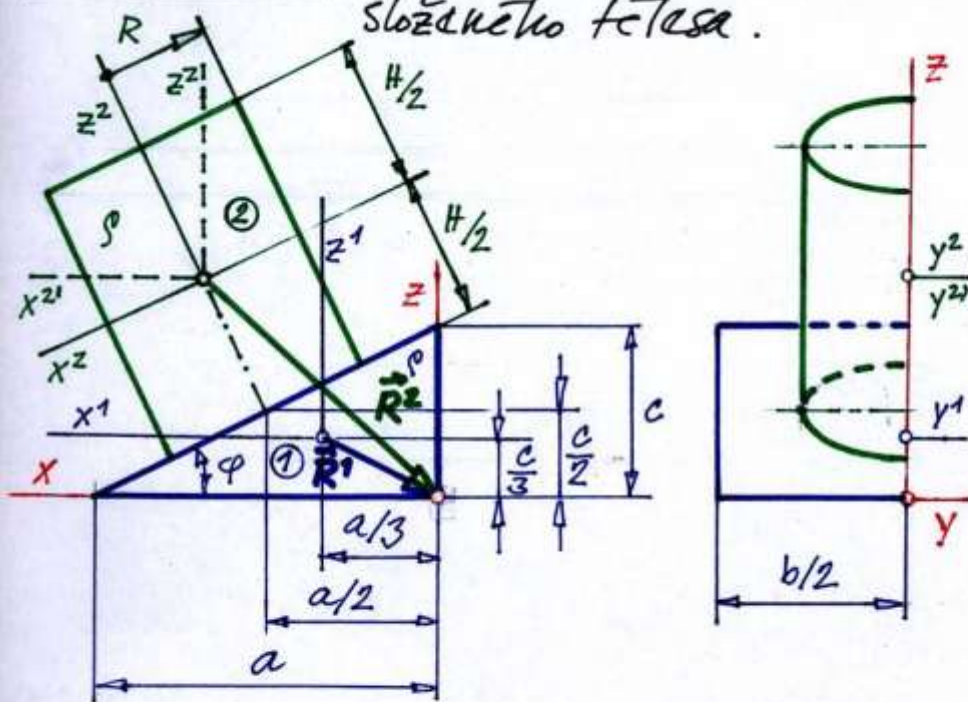


Příklad 8.2. Kvadratické momenty složeného tělesa.



Dáno: Homogenní těleso s hustotou ρ , složené z klínu o rozměrech a, b, c a z válce o poloměru R a výšce H sestavené podle obrázku.

Určit: Matici setrvačnosti $\mathbb{I}$ tělesa v souřadnicovém systému (x, y, z) .

Řešení:

Pro těleso ① snadno určíme hmotnost $m_1 = \rho \frac{abc}{2}$ a matici setrvačnosti pro souřadnicový systém (x^1, y^1, z^1) v těžišti

$$\mathbb{I}^1 = \frac{m_1}{36} \begin{bmatrix} 3b^2 + 2c^2 & 0 & ac \\ 0 & 2(c^2 + a^2) & 0 \\ ac & 0 & 2a^2 + 3b^2 \end{bmatrix}.$$

Souřadnicový systém (x, y, z) je vzhledem k (x^1, y^1, z^1) posunut o vektor $\vec{R}^1$ se složkami

$$x^1 = -\frac{a}{3}, \quad y^1 = 0, \quad z^1 = -\frac{c}{3},$$

takže matice Steinerovyho vzorce je

$$\mathbb{D}^1 = \frac{m_1}{9} \begin{bmatrix} c^2 & 0 & -ac \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ -ac & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Matice setrvačnosti tělesa ① vzhledem

souř. systému (x, y, z) tak je

$$\mathbb{I}_{x,y,z}^1 = \mathbb{I}^1 + D^1.$$

Pro těleso 2 známe hmotnost

$$m_2 = \rho \pi R^2 H$$

a matici setrvačnosti pro souřadnicový systém (x^2, y^2, z^2)

$$\mathbb{I}^2 = \frac{m_2}{4} \begin{bmatrix} R^2 + \frac{H^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + \frac{H^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix}.$$

Před aplikací Steinerovy věty je však nyní třeba určit matici setrvačnosti $\mathbb{I}^{2'}$ vzhledem k souřadnicovému systému $(x^{2'}, y^{2'}, z^{2'})$ rovnoběžnému s (x, y, z) . Souřadnicový systém (x^2, y^2, z^2) je vzhledem

k $(x^{2'}, y^{2'}, z^{2'})$ otočen okolo osy $y^2 \equiv y^{2'}$ o úhel φ , přičemž

$$\varphi = \arctg \frac{c}{a}.$$

Transformační matice T je tedy

$$T = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & 0 & \sin(-\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\varphi) & 0 & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbb{I}^{2'} = T^T \mathbb{I}^2 T.$$

Vektor posunutí $\vec{R}^2$ souř. systému $(x^{2'}, y^{2'}, z^{2'})$ do (x, y, z) má složky

$$x^2 = -\frac{H}{2} \sin\varphi - \frac{a}{2}$$

$$y^2 = 0$$

$$z^2 = -\frac{H}{2} \cos\varphi - \frac{c}{2},$$

takže matice Steinerových členů pro těleso ② je

$$D_{1,1}^2 = m_2 \left(\frac{H^2}{4} \cos^2 \varphi + \frac{Hc}{2} \cos \varphi + \frac{c^2}{4} \right)$$

$$D_{2,2}^2 = m_2 \left[\frac{H^2}{4} + \frac{H}{2} (c \cos \varphi + a \sin \varphi) + \frac{c^2 + a^2}{4} \right]$$

$$D_{3,3}^2 = m_2 \left(\frac{H^2}{4} \sin^2 \varphi + \frac{Ha}{2} \sin \varphi + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$D_{1,3}^2 = D_{3,1}^2 = \frac{m_2}{4} (H^2 \sin \varphi \cos \varphi + Hc \sin \varphi + Ha \cos \varphi + ac)$$

$$D_{1,2}^2 = D_{2,1}^2 = D_{2,3}^2 = D_{3,2}^2 = 0.$$

Matice setrvačnosti tělesa ② vzhledem k souř. systému (x, y, z) tak bude

$$\mathbb{I}_{x,y,z}^2 = \mathbb{I}^{2'} + \mathbb{D}^2$$

a celková matice setrvačnosti složeného tělesa

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}_{x,y,z}^1 + \mathbb{I}_{x,y,z}^2.$$