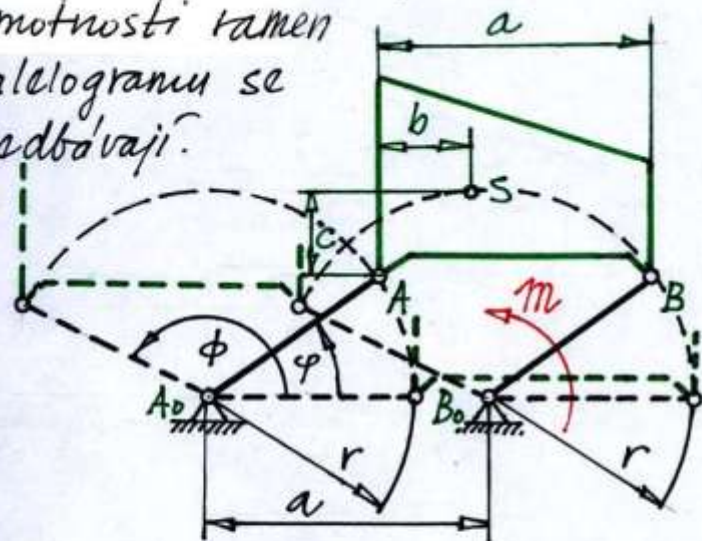


Příklad 9.1. Dynamika posuvného pohybu.

Těleso dané hmotnosti, daných rozměrů a s danou polohou těžiště se pomocí paralelogramu přemísťuje za daný čas z jedné dané polohy do druhé působením hnacího momentu daného průběhu na rameno paralelogramu. Tíhová síla a hmotnosti ramen paralelogramu se zanedbávají.



Dáno: - rozměry a, b, c, r ;
 - hmotnost tělesa m ;
 - čas přemístění T ;
 - úhel přemístění Φ ;

- průběh hnacího momentu

$$M(t) = M_0 \cos(kt);$$

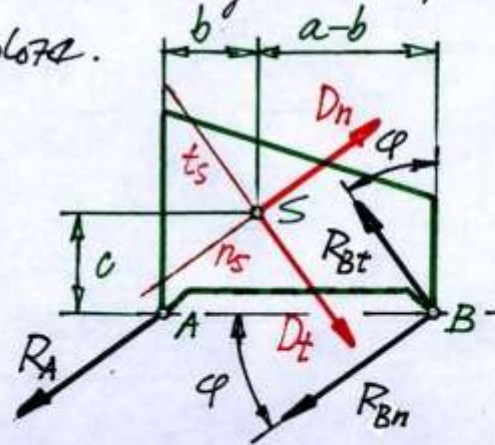
- okrajové podmínky pro rychlost
 $v_S(0) = v_S(T) = 0$ a pro výchylku
 $\varphi(0) = 0, \varphi(T) = \Phi$.

Určit: - konstanty k, M_0 ;

- maximální rychlost v_{max} tělesa;
 - reakce R_A, R_B v bodech A, B.

Řešení:

Použijeme d'Alembertovu metodu pokybových rovnic. Základem je uvolnění tělesa vřetvo dynamických sil, v obecné poloze.



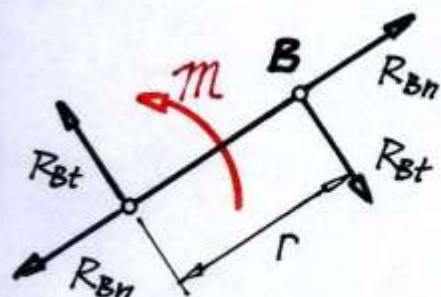
Rovnice dynamické rovnováhy

$$t: R_{Bt} - D_t = 0 \quad (1)$$

$$n: R_A + R_{Bn} - D_n = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{s}: (R_{Bt} \cos \varphi - R_{Bn} \sin \varphi)(a-b) + R_A b \sin \varphi - \\ - (R_A \cos \varphi + R_{Bn} \cos \varphi + R_{Bt} \sin \varphi)c = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Uvolnění a rovnováha ramena B₀B



$$\sqrt{B}: M - r R_{Bt} = 0. \quad (4)$$

Specifikace sil

$$D_t = m a_{st}, \quad D_n = m a_{sn}. \quad (5, 6)$$

Kinematické rovnice

$$a_{st} = \frac{dv_s}{dt}, \quad a_{sn} = \frac{v_s^2}{r}, \quad (7, 8)$$

$$v_s = r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9)$$

DYN-09-1.2

Inventura:

Proměnné jsou $R_{Bt}, D_t, R_A, R_{Bn}, D_n, \varphi, M,$
 a_{st}, a_{sn}, v_s , celkem 10. Rovnic, včetně
řadění pro M , je také 10.

Matematické řešení:

Z rovnic (1), (4), (5) a (7) dostáváme
klerní plytkou rovnici

$$\frac{M}{r} - m \frac{dv_s}{dt} = 0.$$

Dosažení za M z řadění dává

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{M_0}{mr} \cos(kt).$$

Separace a integrace s ohledem na
počáteční podmínku $v(0) = 0$

$$\int_0^{v_s(t)} dv_s = \frac{M_0}{mr} \int_0^t \cos(kt) dt,$$

$$v_s(t) = \frac{M_0}{mr} \frac{1}{k} \sin(kt). \quad (10)$$

Aplikace dráhy objavit průvlek

$$v_s(T) = \frac{M_0}{mr} \frac{1}{k} \sin(kT) = 0$$

děra
neboli $\sin(kT) = 0$

$$kT = \pi, \quad k = \frac{\pi}{T}$$

Průběh rychlosti těžiště je tedy

$$v_s(t) = \frac{M_0 T}{\pi m r} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

Z rovnice (9) dále

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_0 T}{\pi m r^2} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$\int_0^{\varphi(t)} d\varphi = \frac{M_0 T}{\pi m r^2} \int_0^t \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt$$

$$\varphi(t) = \frac{M_0 T^2}{\pi^2 m r^2} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right]$$

Aplikace 2. okrajové podmínky pro

DYN-04-1.3

$\varphi(T)$ děra

$$\varphi(T) = \phi = \frac{M_0 T^2}{\pi^2 m r^2} 2$$

Z toho můžeme

$$M_0 = \frac{\pi^2 m r^2 \phi}{2 T^2}$$

takže podle (10)

$$v_s(t) = \frac{\pi r \phi}{2 T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \quad (11)$$

Maximální rychlost nestává evidentní pro $t = \frac{T}{2}$ kdy $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, takže

$$v_{max} = \frac{\pi r \phi}{2 T}$$

Pro určení reakcí, zbývají rovnice (2), (3), (6) a (7). Úpravou dostaneme

$$R_A + R_{Bn} = m \frac{v_s^2}{r}$$

$$(b \sin \varphi - c \cos \varphi) R_A - [(a-b) \sin \varphi + c \cos \varphi] R_{Bn} = \\ = [-(a-b) \cos \varphi + c \sin \varphi] R_{Bt},$$

což jsou dvě lineární rovnice pro neznámé R_A, R_{Bn} . Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b \sin \varphi - c \cos \varphi & -(a-b) \sin \varphi + c \cos \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -(a-b) \sin \varphi - c \cos \varphi - b \sin \varphi + c \cos \varphi = -a \sin \varphi.$$

Další řešení Cramerovým pravidlem dává

$$R_A = \frac{\begin{vmatrix} m \frac{v_S^2}{r} & 1 \\ [-(a-b) \cos \varphi + c \sin \varphi] R_{Bt} & -(a-b) \sin \varphi + c \cos \varphi \end{vmatrix}}{-a \sin \varphi} =$$

$$= \frac{\frac{m v_S^2}{r} [(a-b) \sin \varphi + c \cos \varphi] - [(a-b) \cos \varphi - c \sin \varphi] R_{Bt}}{a \sin \varphi},$$

kam za v_S a R_{Bt} dosadíme z (11) a (4).

DYN-04-1.4

Analogicky pro neznámou R_{Bn}

$$R_{Bn} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m \frac{v_S^2}{r} \\ b \sin \varphi - c \cos \varphi & [-(a-b) \cos \varphi + c \sin \varphi] R_{Bt} \end{vmatrix}}{a \sin \varphi} =$$

$$= \frac{[(a-b) \cos \varphi - c \sin \varphi] R_{Bt} + \frac{m v_S^2}{r} (b \sin \varphi - c \cos \varphi)}{a \sin \varphi}.$$