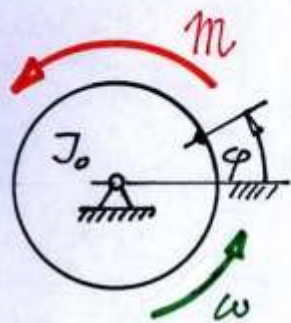


Příklad 9.2. Rozběh asynchronního elektromotoru "naprázdno".



Rotor elektromotoru s daným momentem setrvačnosti k rotační ose se roztočí pod působením pouze kinetického momentu charakterizovaného danou momentovou charakteristikou.

Dáno: - moment setrvačnosti J_0 k rotační ose;

- momentová charakteristika

$$M = M_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \left[8 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{\omega}{\omega_0} + 1\right];$$

- konstanty M_0, ω_0 ;

- počáteční podmínka $\omega(0) = 0$.

Úloha:

- vyšetřete momentovou charakteristiku v intervalu $0 \leq \omega \leq \omega_0$;
- určete závislost $\omega(\varphi)$ úhlové rychlosti ω rotoru na polohovém úhlu φ .

Řešení:

Vyšetřit křivku, zde momentovou charakteristiku, znamená učit hodnoty v krajních bodech intervalu, a polohy a velikosti extrémů.

Proveďte sami!

Vlastní dynamické řešení vyplývá z pohybové rovnice momentové k ose rotace. Platí

$$J_0 \alpha = M. \quad (1)$$

Protože výsledkem řešení má být

zdrislost $\omega(\varphi)$, musíme pro úkloně
zrychlení α použít vztah

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Dosadíme-li dále do (1) M z druhé
momentové charakteristiky, dostaneme
diferenciální rovnici

$$J_0 \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = M_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \left[8 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{\omega}{\omega_0} + 1\right].$$

Pro snazší počítání se hodí zavést
bezrozměrnou proměnnou

$$x = \frac{\omega}{\omega_0};$$

diferenciální rovnice tak přejde na tvar

$$J_0 \omega_0^2 x \frac{dx}{d\varphi} = M_0 (1-x) (8x^2 + x + 1).$$

Separovaný tvar je

$$\frac{x dx}{(1-x)(8x^2 + x + 1)} = \frac{M_0}{J_0 \omega_0^2} d\varphi$$

a integrace s přihlednutím k poč.
podmínce

$$\omega(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$$

$$\text{je } \int_0^{x(\varphi)} \frac{x dx}{(1-x)(8x^2 + x + 1)} = \frac{M_0}{J_0 \omega_0^2} \int_0^\varphi d\varphi. \quad (2)$$

Na levé straně je integrál z funkce
racionální ryzě lomené. Integrand
upravíme metodou neurčitých koefi-
centů na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(1-x)(8x^2 + x + 1)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx + C}{8x^2 + x + 1},$$

$$x = A(8x^2 + x + 1) + (Bx + C)(1-x),$$

neboli

$$8Ax^2 + Ax + A + Bx + C - Bx^2 - Cx = x.$$

Uspořádáním podle mocnin x dostaneme

$$(8A - B)x^2 + (A + B - C)x + (A + C) = x.$$

Z toho vyplývají tři rovnice

$$A + C = 0$$

$$A + B - C = 1$$

$$8A - B = 0$$

pro tři neznámé A, B, C . Řešení je

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = \frac{8}{10}, \quad C = -\frac{1}{10}.$$

Proti parciální zlomek se integruje

snadno:

$$\int_0^x \frac{A dx}{1-x} = -\frac{1}{10} \int_0^x \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{10} \ln|x-1|.$$

Druhý parciální zlomek dále upravíme

$$\frac{Bx+C}{8x^2+x+1} = \frac{B}{16} \frac{16x+1}{8x^2+x+1} + \left(C - \frac{B}{16}\right) \frac{1}{8x^2+x+1},$$

kde po dosazení za B a C

$$\frac{Bx+C}{8x^2+x+1} = \frac{1}{20} \frac{16x+1}{8x^2+x+1} - \frac{3}{20} \frac{1}{8x^2+x+1}.$$

Integrál

$$\int_0^x \frac{Bx+C}{8x^2+x+1} dx = \frac{1}{20} \int_0^x \frac{16x+1}{8x^2+x+1} dx - \frac{3}{20} \int_0^x \frac{dx}{8x^2+x+1}$$

se tak skládá ze dvou částí

$$\int_0^x \frac{16x+1}{8x^2+x+1} dx = \ln(8x^2+x+1)$$

a (podle tabulek)

$$\int_0^x \frac{dx}{8x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 8 - 1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{16x+1}{\sqrt{4 \cdot 8 - 1}} \right]_0^x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \left(\operatorname{arctg} \frac{16x+1}{\sqrt{31}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{31}} \right).$$

Z rovnice (2) nyní můžeme vypočítat

$$\varphi = \frac{J_0 \omega_0^2}{10 m_0} \left[\frac{1}{2} \ln(8x^2 + x + 1) - \ln|x-1| - \right. \quad (3)$$

$$\left. - \frac{3}{\sqrt{31}} \left(\operatorname{arctg} \frac{16x+1}{\sqrt{31}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{31}} \right) \right],$$

což je funkce $\varphi = \varphi(x)$, invertu k požadované $x = x(\varphi)$.

Inverzi v uzavřené formě provést přesně nelze, přibližně to však možné je. Pro hodnoty $x \rightarrow 1$, tedy pro $\omega \rightarrow \omega_0$, představují 1. a 3. člen v hranaté závorce

na pravé straně (3) nevelké konečné hodnoty, zatímco člen $\ln|x-1| \rightarrow -\infty$.

Můžeme proto přibližně napsat

$$\varphi \doteq - \frac{J_0 \omega_0^2}{10 m_0} \ln|x-1|.$$

Z toho

$$|x-1| \doteq e^{-\frac{10 m_0}{J_0 \omega_0^2} \varphi} \quad (4)$$

V intervalu $0 \leq x < 1$ je $x-1 < 0$, takže $|x-1| = 1-x$. Po dosazení do

(4) dostáváme nakonec

$$x(\varphi) = 1 - e^{-\frac{10 m_0}{J_0 \omega_0^2} \varphi}$$

resp.

$$\omega(\varphi) = \omega_0 \left(1 - e^{-\frac{10 m_0}{J_0 \omega_0^2} \varphi} \right).$$

Nakreslete graf!