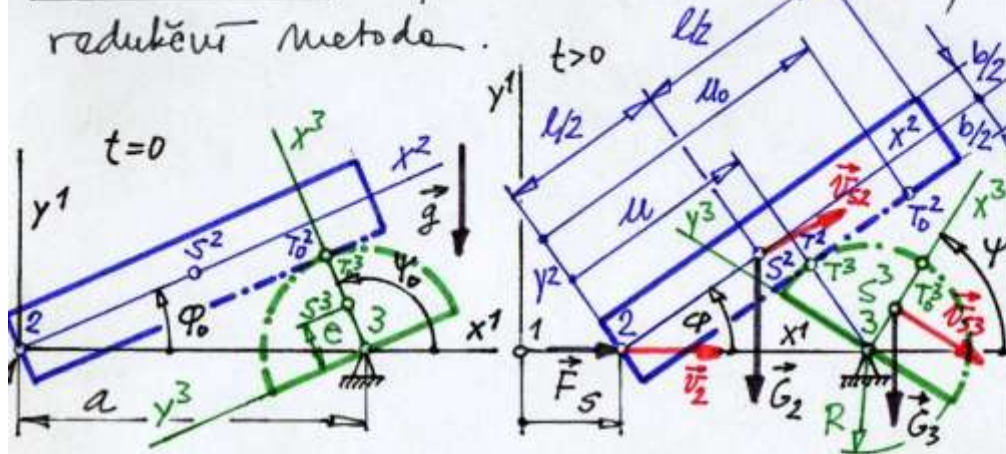


Příklad 13.2. Dynamika soustav těles, redukční metoda.



Tričlenná soustava je tvořena nepohyblivým rámelem č. 1, SS(1, x^1, y^1), ozubeným hrábkem č. 2, SS(2, x^2, y^2) a ozubeným segmentem č. 3, SS(3, x^3, y^3) ve tvaru polokružce. Těleso 3 je na základním rámu uloženo rotačně, těleso 2 je počátkem 2 SS vedeno po přímce x^1 a vazba mezi tělesy 2 a 3 je valivá v dotykovém bodě $T^2 \equiv T^3$. V obrazech je zakreslena výchozí poloha $t=0$ a běžná poloha $t>0$. Těleso 2 je zatíženo danou silou $\vec{F}$ a vlastní tíhou, těleso 3 jen vlastní tíhou.

Dáno:

- rozměry a, b, l, e, R ;
- hmotnostní charakteristiky m_2, J_{S2}, m_3, J_{S3} ;
- síla $F = F_0 \cos kt$, $F_0, k \dots$ konstanty.

Určete pohyb dané soustavy redukce na fiktivní hmotný bod v místě 2 tělesa 2.

Řešení.

Použijeme redukovanou pohybovou rovnici

$$m^* \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{d m^*}{d t} \dot{q}^2 = Q^*, \quad (1)$$

kde polohovou souřadnici soustavy bude

$$q = s.$$

Redukovanou hmotnost m^* vypočteme z rovnosti kinetické energie redukované a skutečné soustavy

$$K = \frac{1}{2} m^* \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{S2}^2 + \frac{1}{2} J_{S2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2. \quad (2)$$

Zde $\omega_3 = \dot{\varphi}$

a v_{s2}, ω_2 se musí učit kinematickým řešením soustavy. Transformační rovnice pro těleso 2 a bod 3 je

$$\mathbf{r}_3^1 = \mathbf{r}_2^1 + \mathbf{T}^{12} \mathbf{r}_3^2. \quad (3)$$

Dosazením za vektory a transformační matici dává

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ -\frac{b}{2} - R \\ 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$a = s + u \cos \varphi + \left(\frac{b}{2} + R\right) \sin \varphi, \quad (4)$$

$$0 = u \sin \varphi - \left(\frac{b}{2} + R\right) \cos \varphi. \quad (5)$$

Eliminací u myslíme

$$\sin \varphi = \frac{\frac{b}{2} + R}{a - s}, \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\frac{b}{2} + R}{a - s} \quad (6)$$

a z rovnice (5)

$$u = \left(\frac{b}{2} + R\right) \cotg \varphi. \quad (7)$$

Podmínku valemí mezi tělesy 2 a 3 uplatníme jako rovnost odrazených oblouků

$$\widehat{T^2 T_0^2} = \widehat{T^3 T_0^3},$$

$$\text{tedy } u_0 - u = R \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \psi \right). \quad (8)$$

Za (7) je

$$u_0 = \left(\frac{b}{2} + R\right) \cotg \varphi_0,$$

přičemž ze (6) je

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\frac{b}{2} + R}{a}.$$

Dosazením do (8) nakonec máme

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{\frac{b}{2} + R}{R} \left(\cotg \varphi_0 - \cotg \varphi \right). \quad (9)$$

Protože podle (6) je $\varphi = \varphi(s)$, je (9) zápisem združené funkce $\psi = \psi(s)$.

Úhlovou rychlost ω_2 můžeme implicitně derivací vztahu (6) upraveného ke tvaru

$$(a-s) \sin \varphi = \frac{b}{2} + R,$$

tzn. $-\dot{s} \sin \varphi + (a-s) \cos \varphi \dot{\varphi} = 0,$

takže $\omega_2 = \dot{\varphi} = \frac{\tan \varphi}{a-s} \dot{s}. \quad (10)$

Rychlost těžiště S^2 tělesa 2 můžeme derivováním transformací rovnice

$$\mathbf{r}_{S^2}^1 = \mathbf{r}_2^1 + \mathbf{J}^{12} \mathbf{r}_{S^2}^2,$$

tzn. $\mathbf{v}_{S^2}^1 = \dot{\mathbf{r}}_2^1 + \dot{\mathbf{J}}^{12} \mathbf{r}_{S^2}^2.$

Dosažením $\mathbf{r}_2$ vektorů a transf. mohzi dostaneme

$$\begin{bmatrix} v_{S^2x} \\ v_{S^2y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tedy $v_{S^2x} = \dot{s} - \frac{b}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (11)$

$$v_{S^2y} = \frac{b}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}. \quad (12)$$

Z toho

$$v_{S^2}^2 = v_{S^2x}^2 + v_{S^2y}^2 = \dot{s}^2 - b \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{b^2}{4} \dot{\varphi}^2. \quad (13)$$

Zbývá vypočítat $\omega_3 = \dot{\psi}$. Z (9) dostaneme

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \left(\frac{b}{2R} + 1 \right) \frac{\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi},$$

takže s přihlednutím k (10) je

$$\omega_3 = \dot{\psi} = \left[1 - \left(\frac{b}{2R} + 1 \right) \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right] \frac{\tan \varphi}{a-s} \dot{s}. \quad (14)$$

Dosažením do (2) můžeme nyní určit redukovanou hmotnost

$$m^* = m_2 \left[1 - b \frac{\sin \varphi \tan \varphi}{a-s} + \frac{b^2}{4} \left(\frac{\tan \varphi}{a-s} \right)^2 \right] + \\ + J_{S^2} \left(\frac{\tan \varphi}{a-s} \right)^2 + \\ + J_3 \left[1 - \left(\frac{b}{2R} + 1 \right) \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right]^2 \left(\frac{\tan \varphi}{a-s} \right)^2. \quad (15)$$

Redukovanou sílu Q^* můžeme z rovnosti okamžitých výkonů působících sil

$$P = Q^* \dot{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}_2 + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_{s2} + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_{s3}.$$

Vzhledem ke směřování působících sil $\vec{F}$, $\vec{G}_2$ a $\vec{G}_3$ je dále

$$Q^* \dot{s} = F \dot{s} - m_2 g v_{sy} - m_3 g v_{sy}. \quad (16)$$

Zde chybí výpočet v_{sy} . Transformační rovnice pro těleso 3 a bod S^3 je

$$\mathbf{r}_{S^3}^1 = \mathbf{r}_3^1 + \mathbf{T}^{13} \mathbf{r}_S^3,$$

takže
$$\mathbf{v}_{S^3}^1 = \dot{\mathbf{T}}^{13} \mathbf{r}_S^3.$$

Dosažením máme

$$\begin{bmatrix} v_{S^3x} \\ v_{S^3y} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

DYN-13-2.4

takže

$$v_{S^3y} = e \cos\psi \dot{\psi}. \quad (17)$$

Dosažením do (16) dostaneme

$$Q^* = F - m_2 g \frac{l}{2} \cos\varphi \frac{\dot{\varphi}}{a-s} - m_3 g e \cos\psi \left[1 - \left(\frac{b}{2R} + 1 \right) \frac{1}{\sin\varphi} \right] \frac{\dot{\varphi}}{a-s}.$$

Pro dosažení do (1) zbývá učit

$$\frac{du^*}{d\varphi} = \frac{du^*}{ds}.$$

Derivaci určíme z (15) samy. Napříkladuďte, že $\varphi = \varphi(s)$, takže

$$\frac{du^*}{ds} = \frac{\partial M^*}{\partial s} + \frac{\partial M^*}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Výsledná diferenciální rovnice je analyticky nerozšířitelná. Musí se použít numerické řešení.