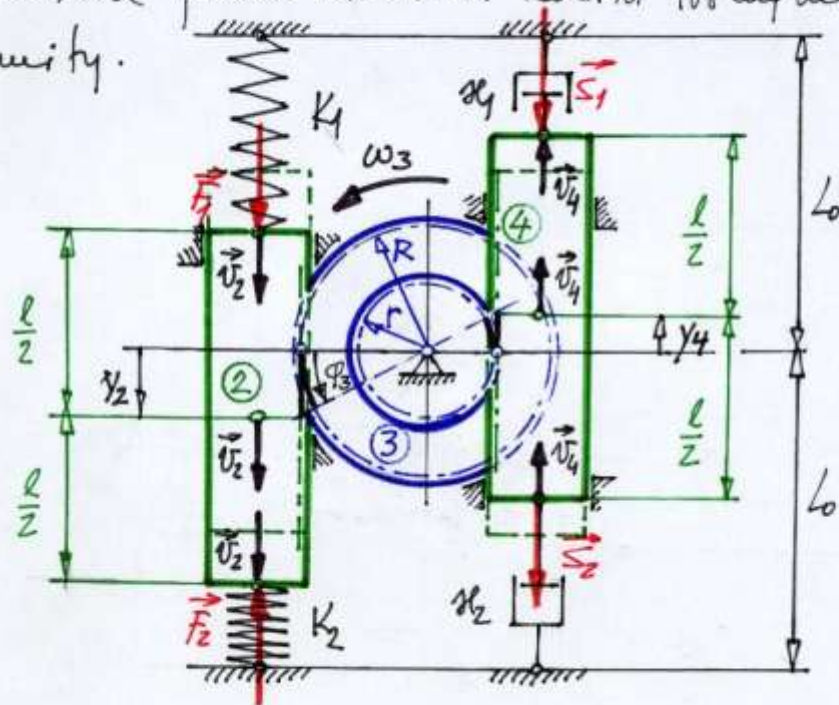


Příklad 14.2. Kmitání soustavy těles.

Soustava podle obrázku kmitá volněmi kmity.



Dáno:

- rozměry r, R, l, L_0 ;
- konstanty tuhosti K_1, K_2 pružin
- konstanty x_1, x_2 tlumičů
- hmotnostní charakteristiky m_2, J_3, m_4 ;

Určit:

- vlastní frekvenci Ω_0 volně uvolněných kmitů;

DYN-14-2.1

- tlumičů frekvenci N .

Řešení provedeme redukční metodou.

Redukovaná polynomiální rovnice soustavy je

$$m^* \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{d m^*}{d q} \dot{q}^2 = Q^* \quad (1)$$

Budeme redukovat např. na osten 3.

Pak $m^* = m_3^*, q = \varphi_3, Q^* = Q_3^*$.

Redukovanou hmotnost můžeme z rovnosti kinetických energií

$$2K = m_3^* \omega_3^2 = m_2 v_2^2 + J_3 \omega_3^2 + m_4 v_4^2;$$

z toho

$$m_3^* = m_2 \left(\frac{v_2}{\omega_3} \right)^2 + J_3 + m_4 \left(\frac{v_4}{\omega_3} \right)^2.$$

Vztahy mezi tělesy 2/3 a 3/4 jsou valivé; přerady můžeme z podmičky rovnosti odvalovacího oblaku.

$$y_2 = R \varphi_3 \left| \frac{d}{dt} \right| \Rightarrow v_2 = R \omega_3 \quad (2)$$

$$y_4 = r\varphi_3 \left| \frac{d}{dt} \right. \Rightarrow v_4 = r\omega_3. \quad (3)$$

z toho

$$\frac{v_2}{\omega_3} = R, \quad \frac{v_4}{\omega_3} = r,$$

takže

$$m_3^* = m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2. \quad (4)$$

Redukovaná síla Q_3^* máme z rovnosti momentů.

$$P = Q_3^* \omega_3 = F_1 v_2 - F_2 v_2 - S_1 v_4 - S_2 v_4.$$

Síly pružin jsou úměrné deformacím

$$F_1 = K_1 \left(\frac{l}{2} - y_2 \right), \quad F_2 = K_2 \left(\frac{l}{2} + y_2 \right).$$

Síly tlumičů jsou úměrné rychlostem

$$S_1 = \mathcal{R}_1 v_4, \quad S_2 = \mathcal{R}_2 v_4.$$

Dosažeme

$$Q_3^* = K_1 \left(\frac{l}{2} - y_2 \right) \frac{v_2}{\omega_3} - K_2 \left(\frac{l}{2} + y_2 \right) \frac{v_2}{\omega_3} - \mathcal{R}_1 v_4 \frac{v_4}{\omega_3} - \mathcal{R}_2 v_4 \frac{v_4}{\omega_3}$$

a po úpravě

DYN-14-2.2

$$Q_3^* = \left[\frac{l}{2}(K_1 - K_2) - (K_1 + K_2)y_2 \right] R - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)r^2 \omega_3,$$

resp. s přihlednutím k (2) a (3)

$$Q_3^* = \frac{l}{2}(K_1 - K_2)R - (K_1 + K_2)R^2 \varphi_3 - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)r^2 \dot{\varphi}_3. \quad (5)$$

Nyní dosadíme (4) a (5) do (1). Dostaneme

$$(m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2) \ddot{\varphi}_3 + (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)r^2 \dot{\varphi}_3 + (K_1 + K_2)R^2 \varphi_3 = -\frac{l}{2}(K_1 - K_2)R. \quad (6)$$

Nenulová pravá strana indikuje existenci statické výchylky. Zavedeme proto

$$\psi_3 = \varphi_3 - \varphi_{3st}$$

a dosadíme do (6). Dostaneme

$$(m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2) \ddot{\psi}_3 + (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)r^2 \dot{\psi}_3 + (K_1 + K_2)R^2 \psi_3 + (K_1 + K_2)R^2 \varphi_{3st} = \frac{l}{2}(K_1 - K_2)R,$$

takže položíme-li

$$\varphi_{3st} = \frac{l}{2R} \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}$$

získáme homogenní diferenciální rovnice soustavy ve tvaru

$$(m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2) \ddot{\psi}_3 + (\kappa_1 + \kappa_2) r^2 \dot{\psi}_3 + (K_1 + K_2) R^2 \psi_3 = 0.$$

Tu nyní normalizujeme na jednotku a čtenec $\ddot{\psi}_3$ s následkem

$$\ddot{\psi}_3 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) r^2}{m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2} \dot{\psi}_3 + \frac{(K_1 + K_2) R^2}{m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2} \psi_3 = 0.$$

Srovnává se standardním tvarem

$$\ddot{x} + 2N \dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

dává nakonec

$$N = \frac{1}{2} \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) r^2}{m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2}$$

a

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{(K_1 + K_2) R^2}{m_2 R^2 + J_3 + m_4 r^2}}.$$