

Príklad 2.1. Volný pád / Svislý vrh.

Ide o priamočarý pohyb podél vertikálnej príčky.

Dáta: $a = \text{konst} = -g$, p.p.: $v(0) = v_0$, $y(0) = y_0$.

Určiť: závislosti $v(t)$, $y(t)$ a $v(y)$.

Dané zrychlenie je podľa definície deriváci rýchlosti podľa času

$$a = -g = \frac{dv}{dt}.$$

Separace proměnných a integrace v sobě odpovídajících metrick

$$dv = -g dt, \quad \int_{v_0}^{v(t)} dv = -g \int_0^t dt.$$

Výsledek integrace

$$v(t) - v_0 = -gt, \text{ resp. } \underline{v(t) = v_0 - gt}$$

Vypočtená rychlost je dále podle definice derivací dráhy podle času

$$v(t) = v_0 - gt = \frac{dy}{dt}.$$

Další separace proměnných a integrace v sobě odpovídajících metrick

$$dy = (v_0 - gt) dt, \quad \int_{y_0}^{y(t)} dy = \int_0^t (v_0 - gt) dt.$$

Výsledek integrace

$$\underline{y(t) - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Vypočtené funkce

$y(t)$, $v(t)$

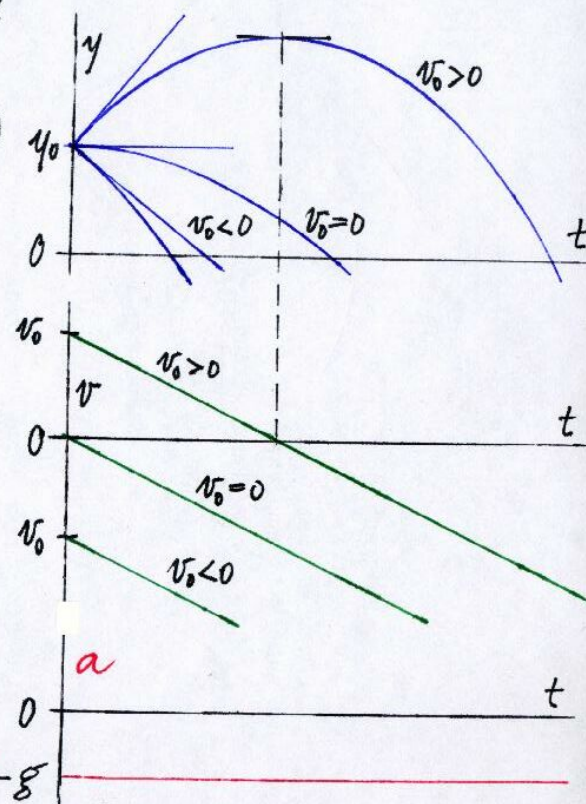
a zadanou $a(t)$ nakreslíme do grafů.

Znátorujeme závislost

rázů na počátečních podmínkách.

Pozor:

Proběh se
jedná o grafy



funkcí a jejich derivací nebo integrálů, musejí grafy odpovídat známým vztahům mezi nimi. Zde např. lokálními extrémy y odpovídá $v=0$.

Zbývá určit závislost $v(y)$. Použijeme identitu $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dy} = a$.

Dosadíme za a , separujeme proměnné a integrujeme v sobě odpovídajících mezích

$$v dv = -g dy, \quad \int_{v_0}^{v(y)} v dv = -g \int_{y_0}^y dy.$$

Výsledek integrace

$$\frac{v(y)^2 - v_0^2}{2} = -g(y - y_0), \quad \underline{v(y)^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)},$$

resp.

$$v(y) = \pm \sqrt{v_0^2 - 2g(y - y_0)}.$$

Odpovídajícím grafem je parabola s osou na ose y , s vrcholem v bodě, kde je $v_0^2 - 2g(y - y_0) = 0$, tj. $y = \frac{v_0^2}{2g} + y_0$, otevřená dolů a procházející bodem (y_0, v_0) . Řešení odpovídá jen části paraboly pod hodnotou $v = v_0$. Jsou znázorněny paraboly pro $v_0 > 0$, $v_0 = 0$ a $v_0 < 0$:

