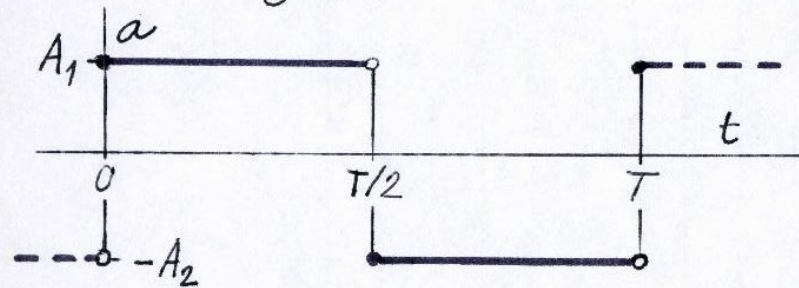


Příklad 2.2: Periodický pohyb přímočarý.

Dáno: průběh $a(t)$ během jedné periody T

$$a(t) = \begin{cases} A_1 & \text{pro } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A_2 & \text{pro } \frac{T}{2} \leq t < T, \end{cases}$$

znázorněno v grafu



a podmínky periodicity

$$a(0) = a(T) \text{ pro zrychlení}$$

$$v(0) = v(T) \text{ pro rychlost}$$

$x(0) = x(T)$ pro výchylku, dráhu,
přičemž rychlost v a výchylka x
musí být spojité.

Určit: vztah mezi A_1, A_2 ; $v(t)$, $x(t)$

Obecně platí definice

$$\frac{dv}{dt} = a(t).$$

Separace proměnných a integrace

$$dv = a(t)dt, \quad \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t)dt.$$

Výsledek po integraci

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t)dt. \quad (1)$$

Analogicky pro výchylku

$$\frac{dx}{dt} = v(t),$$

$$dx = v(t)dt, \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v(t)dt,$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t)dt. \quad (2)$$

1. Aplikace na interval $0 \leq t < \frac{T}{2}$.

Zde je $a = A_1 = \text{konst}$, $t_0 = 0$.

Dosažením do rovnice (1) dostaneme

$$v(t) = v(0) + A_1 \int_0^t dt = v(0) + A_1 t.$$

Dosažením do rovnice (2) dostaneme

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(0) dt + A_1 \int_0^t t dt,$$

což dáva

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2} A_1 t^2.$$

Hodnoty na konci intervalu jsou

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = v(0) + \frac{A_1 T}{2}, \quad (3)$$

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = x(0) + v(0)\frac{T}{2} + \frac{1}{8} A_1 T^2. \quad (4)$$

S těmito hodnotami vstupují
příběhy do 2. intervalu.

2. Aplikace (1) a (2) na interval $\frac{T}{2} \leq t < T$.

Zde je $a = -A_2 = \text{konst}$, $t_0 = \frac{T}{2}$.

Dosažením do (1) dostaneme

$$v(t) = v\left(\frac{T}{2}\right) - A_2 \int_{\frac{T}{2}}^t dt = v\left(\frac{T}{2}\right) - A_2 \left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Dosažením do (2) dostaneme

$$x(t) = x\left(\frac{T}{2}\right) + v\left(\frac{T}{2}\right) \int_{\frac{T}{2}}^t dt - A_2 \int_{\frac{T}{2}}^t t dt + \frac{A_2 T}{2} \int_{\frac{T}{2}}^t dt,$$

což dáva

$$x(t) = x\left(\frac{T}{2}\right) + \left[v\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{A_2 T}{2}\right] \left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{A_2}{2} \left(t^2 - \frac{T^2}{4}\right).$$

Nyní dosadíme z (3) a (4) za $v\left(\frac{T}{2}\right)$ a $x\left(\frac{T}{2}\right)$. Dostaneme

$$v(t) = v(0) + (A_1 + A_2) \frac{T}{2} - A_2 t \quad (5)$$

a

$$x(t) = x(0) + v(0) \frac{T}{2} + \frac{A_1}{8} T^2 + \left[v(0) + (A_1 + A_2) \frac{T}{2}\right] \left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{A_2}{2} \left(t^2 - \frac{T^2}{4}\right) \quad (6)$$

Hodnoty na konci 2. subintervalu jsou

$$v(T) = v(0) + (A_1 - A_2) \frac{T}{2} \quad (7)$$

a

$$x(T) = x(0) + v(0)T + (3A_1 - A_2) \frac{T^2}{8}. \quad (8)$$

Nyní aplikujeme podmínky periodicity.

Podmínka pro zrychlení je splněna zadáním. Podmínka pro rychlost aplikovaná na (7) dává

$$A_1 - A_2 = 0, \text{ tj. } A_1 = A_2, \text{ označme } A. \quad (9)$$

Podmínka pro výchylku aplikovaná na (8) dává

$$v(0)T + \frac{AT^2}{4} = 0, \text{ tj. } v(0) = -\frac{AT}{4}. \quad (10)$$

Aplikace podmínek periodicity neurčuje žádnou hodnotu pro $x(0)$. Je tedy $x(0)$ libovolné.

KIN-02-2.3

Nakonec dosadíme za A_1, A_2 a $v(0)$ do vyšších vztahů. V 1. subintervalu tak bude

$$v(t) = -\frac{AT}{4} + At = A\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

$$x(t) = x(0) - \frac{AT}{4}t + \frac{A}{2}t^2 = x(0) + \frac{A}{2}t\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

V 2. subintervalu bude podle (5) a (6)

$$v(t) = -\frac{AT}{4} + AT - At = -A\left(t - \frac{3T}{4}\right)$$

$$x(t) = x(0) - \frac{AT^2}{8} + \frac{AT^2}{8} + \left(-\frac{AT}{4} + AT\right)\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{A}{2}\left(t^2 - \frac{T^2}{4}\right) = \dots =$$

$$= x(0) + \frac{A}{2}\left(t - \frac{T}{2}\right)(T - t).$$

Hodnoty uprostřed intervalu ($t = \frac{T}{2}$) jsou podle (3) a (4)

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{AT}{4} + \frac{AT}{2} = \frac{AT}{4}$$

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = x(0) - \frac{AT^2}{8} + \frac{AT^2}{8} = x(0)$$

Výsledky ukazují, že rychlost je funkce lineární, po částech spojitá

$$v(t) = \begin{cases} A(t - \frac{T}{4}) & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A(t - \frac{3T}{4}) & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \text{ pro}$$

a výchylka je funkce kvadratická, po částech spojitá

$$x(t) = \begin{cases} x(0) + \frac{A}{2}t(t - \frac{T}{2}) \\ x(0) + \frac{A}{2}(t - \frac{T}{2})(T - t) \end{cases}$$

V grafickém zobrazení je to "pilový" průběh pro rychlost a uvažující paraboly pro výchylky. Extrémny výchylky nastávají v okamžicích, kdy rychlost (derivace dráhy) je nulová; minimum v 1. subinterválu,

KIN-02-2.4

protože zde je zrychlení (2. derivace dráhy) kladné (+A) a maximum je ve 2. subinterválu, protože zde je zrychlení záporné (-A).

Hodnoty extrémů jsou

$$x_{\min} = x(\frac{T}{4}) = x(0) + \frac{A}{2} \frac{T}{4} (\frac{T}{4} - \frac{T}{2}) = x(0) - \frac{AT^2}{32}$$

$$x_{\max} = x(\frac{3T}{4}) = x(0) + \frac{A}{2} (\frac{3T}{4} - \frac{T}{2}) (T - \frac{3T}{4}) = x(0) + \frac{AT^2}{32}$$

