

Příklad 2.3. Přímocárý pohyb, nez. prom. dráha.

Dáno:  $A_1, A_2 \neq A_1, L$

$$a(x) = \begin{cases} A_1 & \text{pro } 0 \leq x < L^* \\ -A_2 & L^* \leq x < L, \end{cases}$$

při okrajových podmínkách  $v(0) = v(L) = 0$   
a podmínce spojitosti  $v(L_-^*) = v(L_+^*)$ .

Určit:  $L^*, v(x)$  a časy  $t^* = t(L^*), T = t(L)$ .

Z definice

$$a = \frac{dv}{dt}$$

implývá

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v.$$

Separace proměnných

$$a dx = v dv. \quad (1)$$

Pro určení  $L^*$  stačí separovanou dif. rovnici integrovat v konstantních mezích

KIN-02-3.1

$$\begin{aligned} v(L) &= 0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad \int_0^L v dv = \int_0^L a dx = \int_0^{L^*} A_1 dx + \int_{L^*}^L (-A_2) dx$$

s výsledkem

$$\left[ \frac{v^2}{2} \right]_0^0 = 0 = A_1 L^* - A_2 (L - L^*).$$

Z toho 
$$L^* = \frac{A_2}{A_1 + A_2} L.$$

Pro určení průběhu  $v(x)$  rychlosti integrujeme separovanou dif. rovnici

(1) v proměnných mezích. Nejprve v 1. subintervalu, kde

$$\int_0^{v(x)} v dv = \int_0^x A_1 dx = A_1 \int_0^x dx,$$

vychází

$$v(x)^2 = 2A_1 x, \quad v(x) = \sqrt{2A_1 x}.$$

V 2. subintervalu, kde

$$\int_{v(x)}^0 v dv = \int_x^L (-A_2) dx = -A_2 \int_x^L dx,$$

vycházejí

$$-v(x)^2 = -2A_2(L-x), \quad v(x)^2 = 2A_2(L-x),$$

resp.

$$v(x) = \sqrt{2A_2(L-x)}.$$

Podmínka spojitosti v  $L^*$  je splněna, neboť

$$v(L_-^*) = \sqrt{2A_1L^*} = \sqrt{2 \frac{A_1A_2}{A_1+A_2} L},$$

$$v(L_+^*) = \sqrt{2A_2(L-L^*)} = \sqrt{2 \frac{A_1A_2}{A_1+A_2} L}.$$

Pro určení času  $t^*$  vyjádříme rychlost v 1. subintervalu jako

$$v(x) = \sqrt{2A_1x} = \sqrt{2A_1} \sqrt{x}$$

a použijeme definiční vztah

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{resp.} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{2A_1} \sqrt{x}$$

Separace proměnných teď bude

KIN-02-3.2

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{2A_1} dt.$$

Integraci možno provést v konstantních mezích, sobě uvažujeme odpovídajících

$$\int_0^{L^*} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{2A_1} \int_0^{t^*} dt.$$

Výsledek integrace je

$$2\sqrt{L^*} = \sqrt{2A_1} t^*,$$

takže

$$t^* = \sqrt{\frac{2L^*}{A_1}} = \sqrt{\frac{2A_2L}{A_1(A_1+A_2)}}.$$

Pro určení celkového času  $T$  vyjádříme rychlost ve 2. subintervalu jako

$$v(x) = \sqrt{2A_2} \sqrt{L-x}$$

a při slušnou dif. rovnici separujeme do tvaru

$$\frac{dx}{\sqrt{L-x}} = \sqrt{2A_2} dt$$

a integrujeme v konstantních mezích

$$\int_{L^*}^L \frac{dx}{\sqrt{L-x}} = \sqrt{2A_2} \int_{t^*}^T dt \quad (2)$$

Integrál na levé straně řešíme substitucí

$$L-x=u, \quad dx=-du, \quad x=L^*: u=L-L^*$$

$$x=L: u=0,$$

neboli

$$-\int_{L-L^*}^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^{L-L^*} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{L-L^*}$$

Rovnice (2) pak bude

$$2\sqrt{L-L^*} = \sqrt{2A_2} (T-t^*)$$

Z toho

$$T = t^* + \sqrt{\frac{2(L-L^*)}{A_2}}$$

KIN-02-3.3

Po dosazení za  $t^*$  a  $L^*$  a úpravě je konečný výsledek

$$T = \sqrt{\frac{2L}{A_1+A_2}} \left( \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \right).$$

Když budeme separované dif. rovnice pro 1. a 2. subinterval integrovat v proměnných mezích, můžeme určit funkci  $t(x)$ .

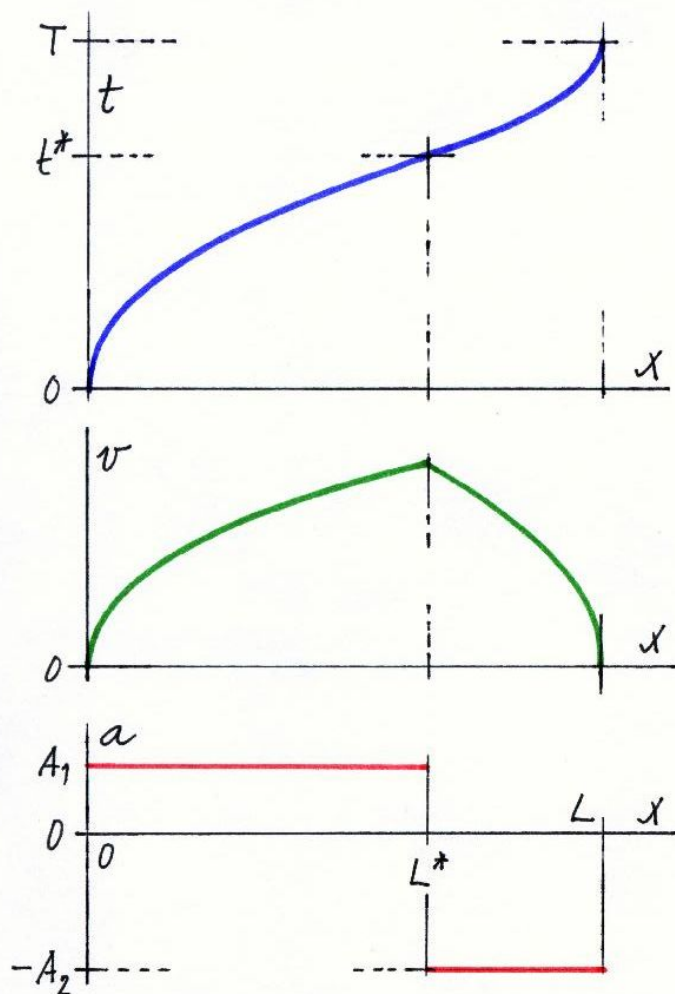
V 1. subintervalu

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{2A_1} \int_0^{t(x)} dt \Rightarrow t(x) = \sqrt{\frac{2x}{A_1}},$$

ve 2. subintervalu

$$\int_x^L \frac{dx}{\sqrt{L-x}} = \sqrt{2A_2} \int_{t(x)}^T dt \Rightarrow t(x) = T - \sqrt{\frac{2(L-x)}{A_2}}.$$

Funkce  $t(x)$ ,  $v(x)$  a  $a(x)$  vyneseme do grafů



Pozor: Protože funkce  $t(x)$ ,  $v(x)$  a  $a(x)$  nejsou navzájem derivacemi nebo integrály, nehledáme mezi jejich grafy vztahy, které platí mezi křivkami navzájem derivujícími nebo integrujícími!