

Příklad 4.2. Pohyb HB v prostoru,
vázaný na křivku danou parametricky

Dáno: konstanty $A, B, C, K; v_{z0};$
trajektorie HB

$$x = A \cos u$$

$$y = B \sin u$$

$$z = Cu \quad (\text{eliptická šroubovice});$$

rychlost ve směru z jako funkce času

$$v_z = v_{z0} + Kt;$$

a počáteční podmínka pro z

$$z(0) = 0.$$

Uřít: $x(t), y(t), z(t);$

$$v_x(t), v_y(t), v_z(t), v(t);$$

$$a_x(t), a_y(t), a_z(t), a(t);$$

$$a_n(t), a_t(t); \vec{t}^0, \vec{n}^0, \vec{b}^0;$$

KIN-04-2.1

Protože $v_z = \dot{z}$, musí platit

$$\dot{z} = C\dot{u} = v_{z0} + Kt.$$

To je diferenciální rovnice pro u .
Zapsaná v separačním tvaru je

$$du = \left(\frac{v_{z0}}{C} + \frac{Kt}{C} \right) dt.$$

Připojíme integrační symboly se
sobě odpovídajícími mezemi

$$\int_{u(0)}^{u(t)} du = \frac{v_{z0}}{C} \int_0^t dt + \frac{K}{C} \int_0^t t dt$$

a výsledek integrace je

$$u(t) = u(0) + \left(\frac{v_{z0}}{C} + \frac{Kt}{2C} \right) t.$$

Hodnotu $u(0)$ zatím neznáme. Uřítme
ji z počátečních podmínek pro z . Protože

$$z(t) = Cu(t) = Cu(0) + \left(v_{z0} + \frac{Kt}{2} \right) t,$$

je $z(0) = Cu(0) = 0.$

Z toho vyplývá, že $u(0) = 0$ a

$$u(t) = \left(v_{z0} + \frac{Kt}{2} \right) \frac{t}{C}.$$

Pro souřadnice pak stačí napsat

$$x(t) = A \cos u(t)$$

$$y(t) = B \sin u(t)$$

$$z(t) = t \left(v_{z0} + \frac{Kt}{2} \right)$$

Složky rychlosti jsou

$$v_x = -A \sin u \cdot \dot{u}$$

$$v_y = B \cos u \cdot \dot{u}$$

$$v_z = v_{z0} + Kt$$

a složky zrychlení

$$a_x = -A \cos u \cdot \dot{u}^2 - A \sin u \cdot \ddot{u}$$

$$a_y = -B \sin u \cdot \dot{u}^2 + B \cos u \cdot \ddot{u}$$

$$a_z = K,$$

přičemž

KIN-04-2.2

$$\dot{u} = \frac{v_{z0}}{C} + \frac{Kt}{C}$$

$$a \quad \ddot{u} = \frac{K}{C}.$$

Absolutní hodnota rychlosti je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{A^2 \sin^2 u + B^2 \cos^2 u + C^2} \cdot \dot{u}$$

a absolutní hodnota zrychlení

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{A^2 (\cos u \cdot \dot{u}^2 + \sin u \cdot \ddot{u})^2 + B^2 (\sin u \cdot \dot{u}^2 - \cos u \cdot \ddot{u})^2 + K^2}.$$

Vektor rychlosti leží na tečce k trajektorii, takže platí

$$v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v \vec{t}^0.$$

Jednotkový tečný vektor je tedy

$$\vec{t}^0 = \frac{v_x}{v} \vec{i} + \frac{v_y}{v} \vec{j} + \frac{v_z}{v} \vec{k}.$$

Zrychlení má složku tečnou a normální. Tečnou složku můžeme

jako průmět vektoru $\vec{a}$ do směru
tečny, tedy

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{t}^0 = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v}$$

Prohžce je

$$\vec{a} = a_t \vec{t}^0 + a_n \vec{n}^0,$$

bude

$$a_n \vec{n}^0 = \vec{a} - a_t \vec{t}^0 =$$

$$\begin{aligned} &= \left(a_x - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v} \frac{v_x}{v} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(a_y - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v} \frac{v_y}{v} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(a_z - \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v} \frac{v_z}{v} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Označíme-li jednotlivé kartézské
složky vektoru $a_n \vec{n}^0$ jako
 a_{nx}, a_{ny}, a_{nz} , bude

KIN-04-2.3

$$a_n = \sqrt{a_{nx}^2 + a_{ny}^2 + a_{nz}^2}$$

a jednotkový vektor v normálním
směru

$$\vec{n}^0 = \frac{a_{nx}}{a_n} \vec{i} + \frac{a_{ny}}{a_n} \vec{j} + \frac{a_{nz}}{a_n} \vec{k}.$$

Nakonec jednotkový vektor v
binormálním směru je

$$\vec{b}^0 = \vec{t}^0 \times \vec{n}^0.$$