

Příklad 4.3. Pohyb HB v prostoru, vázaný na křivku danou jako průsečnice dvou ploch.

Dáno: konstanty $H, b, c, p, x_0, y_0, v_{x0}$;

plocha 1

$$H \sin(bx) \cos(cy) - z = 0, \quad (1)$$

plocha 2

$$y + y_0 - p(x + x_0)^2 = 0, \quad (2)$$

konstantní složka rychlosti ve směru x

$$v_x = \text{konst.} = v_{x0},$$

počáteční podmínka pro $x(t)$

$$x(0) = 0.$$

Určit: $x(t), y(t), z(t);$

$$v_y(t), v_z(t);$$

$$a_x(t), a_y(t), a_z(t);$$

x -ová složka rychlosti je podle definice

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

V daném případě je v_x dáno. Jedná

KIN-04-3.1

se tedy o diferenciální rovnici. Její separovaný tvar je

$$dx = v_{x0} dt.$$

Integrace se zadáním počáteční podmínkou

$$\int_0^{x(t)} dx = v_{x0} \int_0^t dt$$

dává řešení

$$x(t) = v_{x0} t.$$

Z rovnice (2) plochy 2 pak přímo

$$y(t) = p(v_{x0} t + x_0)^2 - y_0$$

a z rovnice (1) plochy 1 nakonec

$$z(t) = H \sin(b v_{x0} t) \cos[c p (v_{x0} t + x_0)^2 - c y_0].$$

Pro účel rychlosti ve směru y derivujeme rovnici (2) podle času

$$\dot{y} - 2p(x + x_0) \dot{x} = 0. \quad (3)$$

Z toho

$$\dot{y} = v_y(t) = 2p(v_{x0}t + x_0)v_{x0}.$$

Analogicky derivujeme rovnice (1) podle času dostaneme

$$H[b\cos(bx)\cos(cy)\dot{x} - c\sin(bx)\sin(cy)\dot{y}] - \dot{z} = 0. \quad (4)$$

Z toho

$$\dot{z} = v_z(t) = H\{b\cos(bv_{x0}t)\cos[cp(v_{x0}t + x_0)^2 - cy_0] - c\sin(bv_{x0}t)\sin[cp(v_{x0}t + x_0)^2 - cy_0]2p(v_{x0}t + x_0)\}v_{x0}.$$

Zrychlení ve směru x

$$a_x = \dot{v}_x = 0,$$

protože v_x je konstantní.

Zrychlení ve směru y dostaneme derivujeme rovnice (3)

$$\ddot{y} - 2p[\dot{x}^2 + (x + x_0)\ddot{x}] = 0.$$

Z toho

$$\ddot{y} = a_y(t) = 2pv_{x0}^2.$$

KIN-04-3.2

Nakonec zrychlení ve směru z dostaneme implicitní derivací (4) podle času

$$H[-b^2\sin(bx)\cos(cy)\dot{x}^2 - bc\cos(bx)\sin(cy)\dot{x}\dot{y} + b\cos(bx)\cos(cy)\ddot{x} - bc\cos(bx)\sin(cy)\dot{x}\dot{y} - c^2\sin(bx)\cos(cy)\dot{y}^2 - c\sin(bx)\sin(cy)\ddot{y}] - \ddot{z} = 0.$$

To lze upravit na tvar

$$\ddot{z} = H[-(b^2\dot{x}^2 + c^2\dot{y}^2)\sin(bx)\cos(cy) - 2bc\dot{x}\dot{y}\cos(bx)\sin(cy) + b\cos(bx)\cos(cy)\ddot{x} - c\sin(bx)\cos(cy)\ddot{y}].$$

Po dosazení vyšších výsledků nakonec je

$$\ddot{z} = a_z(t) = -H\left\{\left[b^2 + 4c^2p^2(v_{x0}t + x_0)^2\right]v_{x0}^2 \cdot \sin(bv_{x0}t)\cos[cp(v_{x0}t + x_0)^2 - cy_0] + 4bc p(v_{x0}t + x_0)v_{x0}^2 \cos(bv_{x0}t)\sin[cp(v_{x0}t + x_0)^2 - cy_0] + 2cpv_{x0}^2 \sin(bv_{x0}t)\cos[cp(v_{x0}t + x_0)^2 - cy_0]\right\}.$$